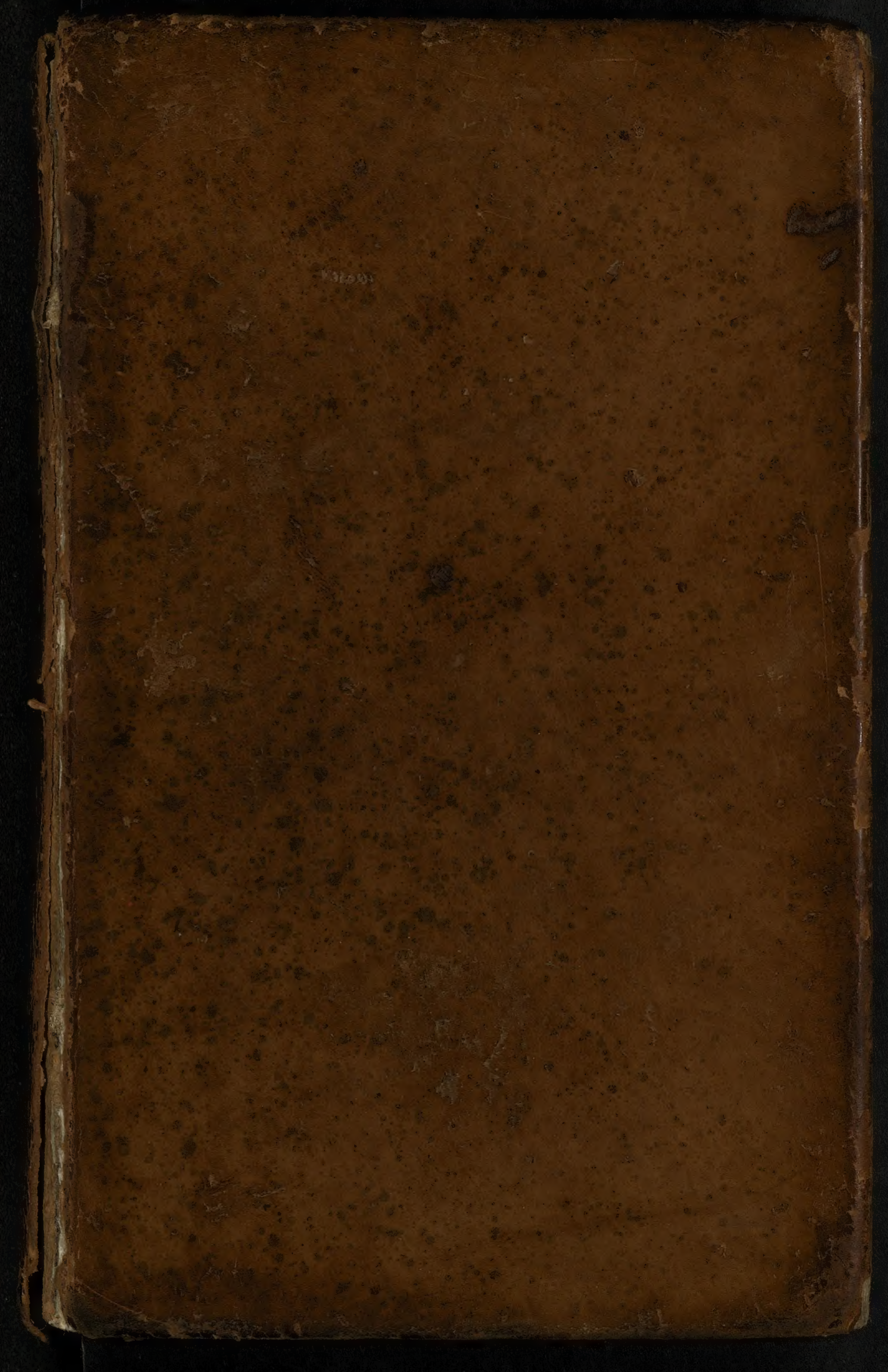


КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ.

КУРСЪ МАТЕМАТИКИ

Господина Безу, Члена Французской Академіи Наукъ, Экзаминатора Воспитанниковъ Артиллерійскаго и Морскаго Корпусовъ, и Королевскаго Цензора.

ПЕРЕВЕДЕНЪ

Васильемъ Загорскимъ

для употребленія

БЛАГОРОДНАГО ЮНОШЕСТВА,

Воспитывающагося

въ

УНИВЕРСИТЕТСКОМЪ ПАНСІОНѢ.

Часть Пятая,

содержащая въ себѣ

ПРИМѢНЕНІЕ ОБЩИХЪ ПРАВИЛЪ

МЕХАНИКИ

къ разнымъ случаямъ движенія и равновѣсія.

МОСКВА, 1803.

Въ Университетской Типографіи,

у Любія, Гарія и Попова.

С҄ дозволенїя Университетскаго Цензора.

ВСЕПРЕСВѢТЛѢЙШЕМУ,

ДЕРЖАВНѢЙШЕМУ,

ВЕЛИКОМУ ГОСУДАРЮ,

ИМПЕРАТОРУ

АЛЕКСАНДРУ ПАВЛОВИЧУ,

САМОДЕРЖЦУ ВСЕРОССІЙСКОМУ,

ГОСУДАРЮ ВСЕМИЛОСТИВѢЙШЕМУ.

ВСЕМИЛОСТИВѢЙШІЙ ГОСУДАРЬ!

Въ Высокомонаршей Особѣ ВАШЕЙ Науки обрѣтая себѣ непреложнаго Покровителя, даютъ мнѣ смѣлость посвятить ВАШЕМУ ИМПЕРАТОРСКОМУ ВЕЛИЧЕСТВУ переводъ сего Математическаго Курса. Успѣхъ его будетъ совершенъ и надежды мои исполнятся, когда пятилѣтній мой надъ онымъ

трудѣ благоугоденѣ явится предѣ лицемѣ ВАШИМЪ.

Сей трудѣ и вмѣстѣ сѣ нимѣ себя повергаю кѣ священнѣйшимѣ стопамѣ

ВАШЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА

всеподданнѣйшій

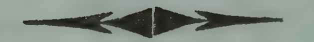
Василій Загорскій.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

Оглавленіе.

Стран.





ПРИМѢНЕНІЕ
ОБЩИХЪ ПРАВИЛЪ
МЕХАНИКИ
Къ разнымъ случаямъ
ДВИЖЕНІЯ и РАВНОВѢСІЯ.

О прямомъ Сраженіи тѣлъ.

350. Теперь намъ должно опредѣлить, какимъ образомъ движеніе одного тѣла переходитъ все, или отчасти въ другое непосредственно, или посредствомъ машинъ.

Изслѣдуемъ сначала непосредственное дѣйствіе движущагося тѣла на другое, пребывающее въ покоѣ или въ движеніи; и предположимъ въ изслѣдованіяхъ своихъ, что нѣтъ въ натурѣ ни тяжести въ тѣлахъ, ни сопротивленія, происходящаго отъ воздуха, тренія и пр.

Допустимъ, что тѣла, о сраженіи которыхъ мы будемъ разсуждать, дѣйствуютъ однѣ на другія по прямой линеѣ, проходящей чрезъ центры тяжести ихъ, и что эта линея перпендикулярна къ плоскости, проведенной чрезъ точку взаимнаго ихъ прикосновенія.

Раздѣлимъ тѣла на два рода: на *твердыя*, которымъ припишемъ такое свойство, что никакая сила не можетъ перемѣнить видимой ихъ фигуры, и на *эластическія* или *упругія*, которыя допустимъ измѣняющимися въ своей фигурѣ, то есть, способными сжиматься и опять принимать прежній видъ, какъ скоро перестаютъ быть сжатыми.

Хотя нѣтъ въ природѣ тѣла ощутительной массы, которое бы можно было отнести къ означеннымъ родамъ; но мы не иначе, какъ по этому предположенію приходимъ въ состояніе опредѣлять дѣйствіе такихъ тѣлъ, какими ихъ природа намъ представляетъ.

О прямомъ Сраженіи твердыхъ тѣлъ.

351. Когда два твердыя тѣла ударяются взаимно, или одно изъ нихъ ударяетъ другое, находящееся въ покоѣ; тогда онѣ сообщаютъ себѣ часть движенія. Какимъ бы

образомъ это ни дѣлалось, однако можно всегда вообразить (287) въ минуту сраженія каждое тѣло возбужденнымъ двумя скоростями, изъ которыхъ одна остается и послѣ удара, а другая уничтожается.

Положимъ вопервыхъ, что два тѣла движутся въ одну сторону; явствуетъ, что то, которое будетъ двигаться скорѣе, потеряетъ при ударѣ часть своей скорости, а другое напротивъ пріобрѣтетъ ее отъ удара.

Пусть будетъ M масса ударяющаго, и V скорость его до сраженія; m масса претерпѣвающаго ударъ (которая быть можетъ больше или меньше M), и U скорость его до удара. Допустимъ, что скорость V по сраженіи перемѣнится въ u; слѣд. M лишится скорости $V - u$. И такъ въ минуту сраженія можно почитать M имѣющимъ вмѣсто скорости V скорость u и скорость $V - u$.

Естьли допустимъ равномѣрно, что U перемѣнится отъ удара въ v, то m пріобрѣтетъ $v - U$; и слѣд можно почитать его въ минуту сраженія имѣющимъ скорость v въ направленіи предполагаемаго движенія, и скорость $v - U$ въ противную сторону; потому что оно въ самомъ дѣлѣ имѣло тогда одну только скорость U.

А поелику изъ четырехъ этихъ скоростей не остается, по положенію, кромѣ двухъ u и v; и потому нужно двумъ прочимъ $V - u$ и $v - U$ уничтожиться послѣ удара. А какъ онѣ противоположны прямо, то количества движенія, которыя получатъ тѣла въ силу этихъ скоростей, должны быть равны. Слѣд. $M (V - u) = m (v - U)$.

А дабы u и v здѣлались скоростями двухъ тѣлъ M и m послѣ ихъ сраженія, какъ мы то здѣсь предполагаемъ, то надобно имъ быть такого свойства, чтобъ ударяющее не имѣло послѣ никакого дѣйствія надъ получившимъ ударъ; то есть, надобно тѣламъ послѣ удара послѣдовать другъ за другомъ постоянно; въ сходственность чего получимъ $v = u$, и слѣд. выведенное прежде уравненіе превратится въ $M (V - u) = m (u - U)$, или въ $MV - Mu = mu - mU$; отсюда выходитъ $u = \frac{MV + mU}{M + m}$. То есть, *когда тѣла будутъ двигаться къ одной сторонѣ, то для опредѣленія ихъ скорости послѣ сраженія, надобно взять сумму количествъ движенія ихъ до удара, и раздѣлить ее на сумму массъ.*

На примѣръ естьли будутъ M 5 унцїй, m 7 унцїй, скорость V по 8 футовъ въ секунду, U по 4 фута въ секунду; то получимъ $u = \frac{5 \times 8 + 7 \times 4}{5 + 7} = \frac{40 + 28}{12} = \frac{68}{12} = 5\frac{2}{3}$; слѣд. скорость послѣ сраженія будетъ по 5 футовъ и $\frac{2}{3}$ въ секунду.

352. Естьли одно изъ тѣлъ, на примѣръ m будетъ до сраженія находиться въ покоѣ; то должно въ уравненіи предположить $U = 0$; а это перемѣнитъ скорость послѣ удара въ $u = \frac{MV}{M + m}$; то есть, должно въ такомъ случаѣ раздѣлить количество движенія ударяющаго на сумму массъ.

Впрочемъ кто пожелаетъ достигнуть до сего заключенія прямѣе, можетъ разсуждать иначе такъ. Естьли представимъ тѣло, получившее ударъ побужденнымъ до сраженія скоростію u равною и въ одинакомъ направленіи съ тою, которую оно должно получить послѣ удара, и скоростію $-u$, то есть, одинакою же скоростію, только въ противномъ направленіи; то поелику оно должно сохранить одну только первую, въ силу второй будетъ принуждено здѣлать равновѣсіе съ тѣломъ M, имѣющимъ скорость $V - u$, которой оно должно лишиться. Слѣд. будемъ

имѣть также $M(V-u) = mu$, или $u = \frac{MV}{M+m}$ уравненіе, которое мы вывели изъ генеральной формулы.

353. Естьли тѣла будутъ стремиться другъ другу на встрѣчу, или съ противныхъ сторонъ; то, чтобъ узнать скорость ихъ послѣ удара, должно предположить въ первой формулѣ $u = \frac{MV + mU}{M+m}$, количество U отрицательнымъ; а это превратитъ ее въ $u = \frac{MV - mU}{M+m}$; то есть, *для опредѣленія скорости, происходящей послѣ сраженія двухъ тѣлъ, движущихся съ противныхъ сторонъ, должно раздѣлить разность количествъ движенія, бывшихъ до удара, на сумму массъ; и эту скорость почитать въ одинакомъ направленіи съ тѣмъ тѣломъ, которое имѣло больше количества движенія.*

Можно дойти прямо и до сего заключенія, употребивъ предыдущее разсужденіе.

И такъ законы прямаго сраженія твердыхъ тѣлъ можно подчинить во всѣхъ случаяхъ одному сему правилу, что *скорость*

послѣ сраженія двухъ тѣлъ бываетъ всегда равна суммѣ или разности количествъ движенія ихъ до удара (глядя потому, въ одну ли сторону движутся тѣла, или съ противныхъ сторонъ), раздѣленной на сумму массъ.

Разсужденія на силу Упорства.

354. Хотя не допускали мы нигдѣ въ предыдущихъ разсужденіяхъ ни тяжести, ни сопротивленія воздуха и всякаго другаго препятствія; однакожъ принимали вездѣ одно изъ сражающихся тѣлъ противящимся другому, и лишающимъ его нѣкоторой части скорости. Но какъ тѣло не имѣя тяжести и не будучи удерживаемо никакимъ препятствіемъ, можетъ само противиться? Это кажется не сообразнымъ; допустивъ сіе, надобно допустить тѣло способнымъ дать себѣ движеніе, потому что оно способно отнять его у другаго, которое на него дѣйствуетъ.

Нѣтъ, по сопротивленію свободнаго тѣла не можно заключать существенно о настоящемъ его движеніи. На примѣръ естьли тѣло A будутъ влечь въ одно время двѣ равныя, но противныя силы, представленныя чрезъ AB, AC (*фиг.* 1.), то безъ сомнѣнія оно

не получитЪ движенія. КогдажЪ кЪ этимЪ силамЪ присовокуплена будетЪ третія равная CA, дѣйствующая на тѣло по направленію CB, то дѣйствіе сей послѣдней должно уничтожиться дѣйствіемЪ прежней AC, и слѣд. тѣло A будетЪ послѣ того повиноваться вЪ движеніи одной силѣ равной AB.

Мы не намѣрены утверждать, по этому ли именно закону противятся тѣла движенію, или по какому нибудь другому; но справедливо то, что сопротивленіе, которому дано названіе *силы упорства*, весьма не сходствуетЪ сЪ тѣмЪ, которое употребляютЪ дѣйствительныя силы, каковы суть силы сражающихся тѣлЪ сЪ противныхЪ сторонЪ; эти послѣднія истребляютЪ нѣкоторую часть своего движенія; но сила упорства то, что уничтожаетЪ вЪ движеніи ударяющаго, сообщаетЪ все вЪ цѣлости ударяемому. Это же доказываетЪ и уравненіе M $(V - u) = m (u - U)$, которое вывели мы для опредѣленія движенія, происходящаго по сраженіи двухЪ тѣлЪ, движущихся вЪ одну сторону; ибо $V - u$ представляетЪ потерянную скорость ударяющимЪ тѣломЪ, и слѣд. M $(V - u)$ будетЪ то количество движенія, котораго оно лишится отЪ удара; равномѣрно подЪ $u - U$ разумѣли мы прі-

обрѣтенную скорость ударяемымъ тѣломъ, а подъ $m(u - U)$ количество движенія его. Но мы доказали, что оба этѣ количества равны между собою.

355. И такъ сила упорства въ собственномъ смыслѣ значитъ средство, по которому сообщается движеніе одного тѣла другому. Всякое тѣло противится движенію, но сопротивляясь принимаетъ его; оно принимаетъ столько движенія, сколько именно истребляетъ его въ другомъ тѣлѣ, дѣйствующемъ на него.

356. Отсюда явствуетъ, что по исключеніи всякаго препятствія, какъ бы не было мало ударяющее тѣло и какую бы напротивъ не имѣло величину ударяемое, но послѣ сраженія ихъ произойдетъ всегда движеніе.

На примѣръ въ томъ случаѣ, гдѣ одно изъ тѣлъ находится въ покоѣ, скорость, имѣющая (352) выраженіемъ $u = \frac{MV}{M+m}$ не можетъ никогда обратиться въ нуль, какой бы опредѣленной величины ни были M, m и V, выключая когда развѣ m здѣлается безконечнымъ, или V безконечно малымъ. Почему естьли мы примѣчаемъ въ природѣ, что тѣла лишаются полученнаго ими движенія; то это происходитъ не отъ инаго чего, какъ что онѣ сообщаютъ его матеріальнымъ частямъ другихъ тѣлъ воздуха и пр., которыя ихъ окружаютъ. А какъ формула $u = \frac{MV}{M+m}$ показываетъ, что чѣмъ болѣе будетъ

масса ударяемаго тѣла m, тѣмъ менѣе скорость u (при всѣхъ впрочемъ равныхъ вещахъ) становится послѣ сраженія; такъ что принимая m за сумму матеріальныхъ частей, съ которыми M раздѣляетъ свое движеніе, не трудно примѣтить, что скорость u сама по себѣ можетъ зделаться невидимою, хотя бы и не должна была противоборствовать неминуемымъ препятствіямъ, каковы треніе и проч., разрушающимъ ее.

357. Поелику сила упорства есть сила свойственная матеріи, и находится равно въ каждой части ея; и потому она бываетъ ощутительна въ опредѣленной массѣ пропорціонально количеству матеріи, или пропорціонально самой массѣ. А какъ масса бываетъ пропорціональна вѣсу, то можно силу упорства принимать также пропорціональною вѣсу. Однако не должно заключать изъ сего, чтобъ сила упорства происходила отъ тяжести; она отнюдь не имѣетъ отъ послѣдней зависимости: ибо естьли рука начнетъ преслѣдовать за упадающимъ свободно тѣломъ съ большею скоростію, нежели съ какою то тѣло опускается, то она встрѣтивъ его ощутитъ отраженіе или сопротивленіе, которое безъ сомнѣнія не можно приписать тяжести, дѣйствующей единственно сверху на низъ. Тѣмъ болѣе не можно приписать его сопротивленію воздуха; ибо сопротивленіе воздуха дѣйствуетъ въ содержаніи поверхно-

сти, и слѣд. не можетъ быть пропорціонально количеству матеріи.

И такъ сила упорства есть сила особенно принадлежащая матеріи, по причинѣ которой всякое тѣло противится измѣненію состоянія своего. *Сила упорства бываетъ пропорціональна количеству матеріи и ощутительна во всякомъ направленіи тѣла, побуждаемаго къ движенію.*

Нѣкоторые примѣры на Сраженіе твердыхъ тѣлъ, и заключенія выводимыя изъ того относительно къ Удаpeнію.

358. Изъясненныя правила на сраженіе твердыхъ тѣлъ принадлежатъ во всякомъ случаѣ тѣламъ, будутъ ли онѣ ударяться непосредственно, или посредствомъ прута, не имѣющаго никакой гибкости и массы, или наконецъ будутъ влекомы ниткою, только бы дѣйствіе переходило непосредственно чрезъ центръ тяжести каждаго.

На примѣръ естьли пожелаемъ опредѣлить движеніе двухъ тѣлъ M и m (*фиг.* 2.), которыя влекутъ взаимно другъ друга снуркомъ по блоку P (*);

(*) Мы предполагаемъ здѣсь, что дѣйствіе передается посредствомъ блока точно такъ, какъ бы обѣ части снурка находились въ прямой линеѣ; мы не преминемъ доказать эту истинну, хотя она и безъ того ощутительна.

то надобно припомнить (171), что тяжесть стремится впечатлѣть каждому изъ нихъ одинакую скорость въ каждое мгновенie. А какъ каждое изъ этихъ тѣлъ не можетъ двинуться безъ того, чтобъ не увлечь за собой другое, то оба онѣ при всякомъ новомъ дѣйствiи тяжести будутъ находиться въ такомъ случаѣ, какъ бы влекли другъ друга въ противуположныя прямо стороны съ одинакими скоростями; и такъ чтобъ получить сложную скорость, должно (353), назвавъ g скорость, которую передаетъ тяжесть въ каждое мгновенie свободному тѣлу, взять разность $Mg - mg$ количествъ движенiя, и раздѣлить ее на сумму $M+m$ массъ; слѣд. получимъ $\frac{Mg - mg}{M+m}$, или $\frac{M-m}{M+m} g$ тою настоящею скоростiю, которую каждое новое дѣйствiе g тяжести присовокупляетъ въ каждое мгновенie тѣлу M. А какъ M, m и g суть количества постоянныя, то явствуетъ, что M будетъ двигаться движенiемъ одинаково возрастающимъ, и что сила увеличивающая его будетъ содержаться къ свободной тяжести $= \frac{M-m}{M+m} g : g$, или $= M - m : M + m$. Почему представивъ чрезъ p скорость свободнаго тѣла M по силѣ тяжести его въ одну секунду времени, будетъ имѣть скорость егожъ, останавливамаго дѣйствiемъ тѣла m, по слѣдующей пропорцiи $M + m : M - m = p : \frac{M-m}{M+m} p$; наконецъ представивъ чрезъ u скорость M по истеченiи числа t секундъ, получимъ (173) $u = \frac{M-m}{M+m} pt$; и пространство, которое будетъ имъ описано, изобразится чрезъ $e = \frac{M-m}{M+m} \frac{pt^2}{2}$, p равняется (174) 30, 2 футамъ.

359. Ежели тѣло m, которое, положимъ, будетъ имѣть меньшую массу, получитъ въ первое

мгновенїе скорость V, то есть, получитЪ такое побужденїе кЪ движенїю, что здѣлавшись свободнымЪ и безЪ тяжести, оно можетЪ протекать вЪ секунду времени число футовЪ, означенное чрезЪ V; то утверждаю, что тѣло m раздѣлитЪ это дѣйствїе сЪ тѣломЪ M, и будетЪ увлекать его за собой на нѣкоторое время. А чтобЪ узнать сей раздѣлЪ, то замѣтимЪ, что дѣйствїе тяжести должно быть вЪ первое мгновенїе безконечно мало, и что тѣло m побуждено будучи скоростїю V, должно дѣйствовать на тѣло M, какЪ бы это послѣднее находилось вЪ покоѣ. Слѣд. для опредѣленїя скорости, имѣющей произойти послѣ побужденїя m, должно (352) раздѣлить количество движенїя mV на сумму массЪ; то есть, $\frac{mV}{M+m}$ изобразитЪ ту скорость, сЪ какою m будетЪ увлекать за собою M, когда бы тяжесть перестала дѣйствовать вЪ послѣдующїя мгновенїя. А какЪ мы видѣли, что тяжесть не перестаетЪ дѣйствовать, и передаетЪ тѣлу M вЪ противную сторону скорость $\frac{M-m}{M+m}pt$ во время t; то слѣдуетЪ заключить, что по истеченїи времени t тѣло m будетЪ имѣть только скорость $\frac{mV}{M+m} - \frac{M-m}{M+m}pt$. Отсюда явствуетЪ, что какЪ бы тѣло m и скорость V малы ни были, и какЪ бы напротивЪ M ни велико было, но m будетЪ всегда увлекать за собою M на нѣкоторое время; послѣ чего M возьметЪ снова верхЪ, и повлечетЪ за собою на оборотЪ тѣло m.

ВЪ самомЪ дѣлѣ какозо бы ни было количество движенїя mV, впечатлѣнное тѣлу m; но пока оно будетЪ имѣть конечную или опредѣленную величину, тяжесть должна неминуемо дѣйствовать нѣкоторое время для истребленїя его, потому что эта послѣдняя дѣйствуетЪ по безконечно малымЪ степенямЪ вЪ каждое мгновенїе.

А чтобЪ узнать. чрезЪ какое время m перестанетЪ увлекать за собою M, то поступай такЪ. ПоложимЪ T за то время, какое нужно тяжелому тѣлу, упадающему свободно на прїобрѣтенїе скорости V. И такЪ по обЪявленному (173) получимЪ $V = pT$; слѣд. скорость тѣла m перемѣняется вЪ $\frac{mpT}{M+m} - \frac{M-m}{M+m}pt$; приравнявЪ ее кЪ нулю, будемЪ имѣть $mpT = (M-m)pt$; отсюда выходитЪ $t = \frac{mT}{M-m}$.

На примѣрЪ естьли впечатлѣнная скорость V будетЪ такова, какую прїобрѣтаетЪ тяжелое тѣло вЪ секунду времени; то T будетЪ вЪ такомЪ случаѣ $= 1''$. ПоложимЪ $M = 100$ фунтамЪ, $m = 1$ фунту; послѣ чего выходитЪ $t = \frac{1''}{99}$, то есть, тѣло m будетЪ увлекать за собой тѣло M на одну только девяносто девятую часть секунды времени; однакожЪ все будетЪ увлекать его.

И такЪ нѣтЪ такой малой силы, разумѣется конечной, которая бы не способна была преодолѣть вѣсЪ тѣла; и притомЪ не можно никогда привести тѣло, находящееся дѣйствительно вЪ движенїи, вЪ равновѣсїе сЪ вѣсомЪ другаго тѣла, то есть, сЪ тѣломЪ, имѣющимЪ одно простое стремленїе тяжести. Первое начнетЪ прежде увлекать за собой второе, но потомЪ будетЪ само увлекаемо; хотя по справедливости и будетЪ между ими нѣкоторое мгновенїе покоя, но это мгновенїе

бываетъ тогда только, когда первое лишится всей впечатлѣнной ему скорости.

360. И такъ сила тѣлъ, находящихся въ движенiи, не можетъ измѣряться вѣсомъ, то есть, дѣйствiемъ одного вѣса, лишеннаго мѣстнаго движенiя; но другими силами движущихся тѣлъ, на примѣръ силами тяжелыхъ тѣлъ, упадающихъ съ извѣстной высоты.

А чтобъ получить понятiе о силѣ трех-фунтоваго тѣла, движущагося со скоростью 60 футовъ въ секунду; то должно сыскать по объявленному (176), съ какой высоты надобно бы упасть тяжелому тѣлу для прiобрѣтенiя сей скорости; мы найдемъ, что эта высота должна равняться почти $59\frac{1}{2}$ футамъ. И потому заключимъ, что трехфунтовое тѣло, движущееся 60 футовъ въ секунду, должно ударить другое такъ, какъ бы оно упало съ высоты ровной $59\frac{1}{2}$ футовъ.

361. Силу, которую движущiяся тѣла способны производить, называется *ударенiемъ*.

Почему силу ударенiя отнюдь не можно сравнивать съ простымъ давленiемъ, то есть, съ тѣмъ усилiемъ массы, которое она производитъ вѣсомъ своимъ безъ мѣстнаго движенiя. Молотокъ легчайшимъ ударомъ вобьетъ нѣсколько гвоздь въ тѣло тогда, когда довольно изрядной вѣсъ не произведетъ надъ нимъ ни малаго дѣйствiя. Тожъ должно заключить и

о тѣлѣ посредственной массы, которое пріобрѣло паденіемъ своимъ нѣкоторую скорость.

Причиною сей разности есть то, что послѣднее сіе тѣло употребляетъ въ одно мгновеніе всѣ степени пріобрѣтенной имъ скорости. Напротивъ того вѣсъ производитъ одно только давленіе, и хотя также получаетъ степени скорости послѣдовательно; но раздѣляетъ ихъ въ тоже время съ гвоздемъ и съ окружающею массою; а какъ каждая изъ сихъ степеней безконечно мала, то она и уничтожается тогда же, когда пріобрѣтается.

362. Послѣ сихъ изъясненій не трудно примѣтить, какъ должно поступать при опредѣленіи движенія тѣла M (*фиг.* 3.), которое будетъ увлекать тѣло M′ по горизонтальной плоскости безъ тренія. Хотя тяжёсть относительно къ тѣлу M′ уничтожится, но она будетъ дѣйствовать на M, и дѣйствіе ея раздѣлится между M и M′ такъ, какъ бы одно изъ нихъ дѣйствовало на другое, находящееся въ покоѣ. И такъ сообразуясь съ предыдущими разсужденіями, и представивъ чрезъ g скорость свободнаго тѣла на одно мгновеніе по силѣ тяжести его; получимъ $\frac{gM}{M+m}$ за ту скорость, которою движеніе M будетъ дѣйствительно увеличено. Скорость его по прошествіи секунды будетъ $\frac{pM}{M+m}$, p означаетъ такую скорость, которую сообщаетъ тяжесть свободному тѣлу въ секунду времени; слѣд. скорость

этого тѣла въ концѣ какого нибудь времени t должна изобразиться чрезъ $\frac{pMt}{M+m}$ (173); а пространство, описанное имъ, чрезъ $\frac{\frac{1}{2}pMt^2}{M+m}$ (174).

363. Но естьли два тѣла A и B. (*фиг.* 4.) будутъ дѣйствовать другъ на друга посредствомъ прута, снурка или матерїальной веревки, которой масса не маловажна относительно къ массѣ ихъ; то эта веревка или прутъ должна имѣть участїе въ ихъ дѣйствїи. На примѣръ естьли тѣло B получивъ нечаянно движенїе къ сторонѣ C съ извѣстною скоростью, будетъ принуждено тащить за собою тѣло A матерїальнымъ снуркомъ AB; то для опредѣленїя скорости въ такомъ случаѣ, надобно раздѣлить количество движенїя B на сумму двухъ массъ A и B вмѣстѣ съ массою снурка AB.

364. Естьли два тѣла M и m (*фиг.* 2) будутъ влечь взаимно другъ друга снуркомъ, повсюду одинаково тяжелымъ; то ускорительная сила M не будетъ больше постоянна, какъ въ означенномъ (358) случаѣ. И вотъ какъ можно опредѣлить ее и движенїе M. Положимъ c длиною всего снурка, P удѣльною тяжестїю его, или вѣсомъ одного фута длины его. Наконецъ представивъ чрезъ x длину части PM, получимъ $Pm = c - x$; а какъ масса PM должна изобразиться чрезъ Px, а Pm чрезъ $P(c-x)$, то получимъ съ одной стороны массою $M + Px$, а съ другой стороны $m + P(c-x)$, изъ которыхъ каждой тяжесть сообщаетъ въ мгновенїе безконечно малую скорость h. И такъ чтобъ узнать, какую скорость получатъ онѣ по силѣ взаимнаго ихъ дѣйствїя, должно раздѣлить разность количествъ движенїя на сумму массъ. Слѣд. для ускорительной силы M бу-

демЪ имѣть количество $\frac{Mh + Phx - mh - P(c - x)h}{M + Px + m + P(c - x)}$, или по приведенiи $\frac{Mh - mh + 2Phx - Pch}{M + m + Pc}$, или наконецЪ здѣлавЪ $M - m - Pc = A$, а $M + m + Pc = B$, превратимЪ количество сiе вЪ $\frac{Ah + 2Phx}{B}$. И такЪ сiя скорость кЪ скорости h тяжести содержится, какЪ $\frac{A + 2Px}{B} : 1$; послѣ чего назвавЪ p скорость, которую впечатлѣваетЪ тяжесть свободному тѣлу вЪ секунду времени, получимЪ вЪ $\frac{A + 2Px}{B} p$ скорость, какую M должно прiобрѣсть вЪ одну секунду, естьли бы вЪ продолженiе оной ускорительная сила была постоянна. Слѣд. вмѣсто p должно поставить количество ея (181) вЪ формулѣ $pdt = d\left(\frac{de}{dt}\right)$, выведенной (184) для перемѣнныхЪ движенiй, равно какЪ должно также вставить dx вмѣсто de, потому что сЪ какого бы мѣста ни стало опускаться тѣло M, пространство, описанное имЪ вЪ каждую минуту, будетЪ равно прибавленiю dx длины PM. Слѣд. $\frac{A + 2Px}{B} pdt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Для интеграцiи сего уравненiя дѣлю его на dt и потомЪ умножаю на dx; отЪ чего выходитЪ $\frac{Adx + 2Pxdx}{B} p = \frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, котораго интеграломЪ будетЪ $\frac{Ax + Px^2}{B} p + C = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt^2}$. А . . чтобЪ опредѣлить постоянное C, то замѣчаю напередЪ, что $\frac{dx}{dt}$ представляетЪ (179) скорость; и такЪ естьли допустимЪ, что тѣло M при началѣ движенiя своего находилось вЪ O, гдѣ $PO = b$, и не получило никакого особеннаго побужденiя, то надобно постоянному C быть такимЪ, чтобЪ скорость, когда

x будетъ $= b$, равнялась нулю; послѣ чего выходитъ $\frac{Ab + Pb^2}{B}p + C = o$, и слѣд. $C = \ldots\ldots$ $\frac{-Ab - Pb^2}{B}p$; и такъ $\frac{Ax + Px^2 - Ab - Pb^2}{B}p = \frac{\frac{1}{2}dx^2}{dt^2}$. Представивъ чрезъ z описанное пространство OM, получимъ $z = x - b$; въ такомъ случаѣ будетъ $x = b + z$ и $dx = dz$, а это превратитъ уравненіе въ $\frac{Az + 2Pbz + Pz^2}{B}p = \frac{\frac{1}{2}dz^2}{dt^2}$; отсюда выходитъ $dt = \frac{dz\sqrt{\frac{B}{2p}}}{\sqrt{[(A + 2Pb)z + Pzz]}}$ такое уравненіе, которое удобно можно интегралить, здѣлавъ его раціональнымъ по объявленному (118); и мы получимъ содержаніе пространства къ времени, которому здѣсь ведемъ щетъ въ секундахъ.

Чтожъ касается до скорости, которая изображается чрезъ $\frac{dz}{dt}$, то назвавъ ее u, получимъ $u = \frac{\sqrt{[(A + 2Pb)z + Pzz]}}{\sqrt{\frac{B}{2p}}}$, и будетъ значить пространство, которое тѣло способно описывать въ каждое мгновеніе чрезъ секунду времени по силѣ дѣйствительнаго его движенія, продолжающагося одинаково.

Примѣчаніе на живыя силы.

365. *Живыя силы* суть ничто иное, какъ силы тѣлъ, находящихся въ движеніи; напротивъ того названіе мертвыхъ силъ дано тѣмъ, которыя на подобіе простаго давленія не оказываютъ никакого настоящаго движенія въ дѣйствующей причинѣ.

Долгое время Математики не согласны были въ мнѣніи своемъ о мѣрѣ живыхъ силъ, то есть, силъ дѣйствительно движущихся тѣлъ. Нѣкоторые доказывали, что силы такого рода не должны измѣряться массою, умноженною на скорость, какъ мы то утвердили (157); но произведеніемъ массы, умноженной на квадратъ скорости. А какъ такая разность въ измѣреніи силъ не можетъ быть маловажнымъ предметомъ для Механики, то мы почитаемъ за нужное посудить объ этомъ.

Безъ сомнѣнія можно измѣрять силу движущагося тѣла двояко, или умножая массу его на простую скорость, или на квадратъ скорости, когда будемъ имѣть не одинакое понятіе о словѣ *сила* въ каждомъ случаѣ.

Когда принимаемъ за мѣру силы произведеніе массы на квадратъ скорости, тогда разумѣемъ подъ словомъ *сила* число препятствій, преодолѣваемое движущимся тѣломъ; но извѣстно, что движущееся тѣло при равной массѣ преодолѣваетъ число препятствій, пропорціональное квадрату скорости своей. На примѣръ естьли тѣло A (*фиг. 5*) будетъ имѣть такую только скорость, какая нужна для закрытія пружины ACB, то тѣ-

лу М равному ему потребно двѣ такихъ скоростей для закрытія четырехъ пружинъ, равныхъ АСВ. Въ самомъ дѣлѣ естьли вообразимъ каждую изъ четырехъ пружинъ раскрытою на одинакое угловое количество съ пружиною ВСА, то не трудно примѣтить, что для всѣхъ ихъ въ такомъ случаѣ должно противоположить въ точкѣ М силу не больше той, какая нужна въ А для удержанія напряженія пружины АСВ. Ибо пружина НІМ будетъ ли упираться точкою Н колѣна своего НІ о колѣно HG близь лежащей пружины, или о неподвижную плоскость PQ, производитъ въ обоихъ случаяхъ одинакое сопротивленіе. По допущеніи сего не трудно заключить, что усиліе М для закрытія четырехъ пружинъ одинаковаго количества въ углѣ съ ВСА должно быть больше противу А по тому только, что оно употребляетъ болѣе времени на одолѣніе, чѣмъ А; а поелику М должно пройти четверное пространство со скоростію, которая вдвое больше только А, то оно употребитъ и времени и сопротивленія также вдвое больше его. Слѣд. сопротивленія А и М будутъ содержаться между собою какъ 1: 2, и слѣд. достаточно двойной силы для закрытія четырехъ пружинъ.

Отсюда явствуетъ, что число препятствій преодолѣваемое движущимся тѣломъ

возрастаетъ въ квадратномъ содержаніи скоростей. Но должно ли подъ словомъ *сила* разумѣть число препятствій? Не лучше ли разумѣть подъ нимъ сумму сопротивленій, полагаемыхъ тѣми препятствіями; ибо движеніе истребляется не только однимъ числомъ препятствій, но и еще величиною каждаго изъ нихъ. А какъ въ семъ случаѣ каждое мгновенное сопротивленіе бываетъ пропорціонально количеству движенія, котораго оно лишаетъ (и въ этомъ всегда были всѣ согласны); то сумма сопротивленій должна быть также пропорціональна количеству истребленнаго движенія. И такъ разумѣя подъ *силою* не *число* препятствій, преодолѣваемое движущимся тѣломъ, а *сумму*, должно заключить, что сила будетъ пропорціональна количеству движенія. На семъ же правилѣ основываясь, заключаемъ также, что числа преодолѣнныхъ сопротивленій содержатся, какъ квадраты скоростей. И такъ разногласіе въ разсужденіи сего вопроса состоитъ въ однихъ словахъ; и слѣд. для рѣшенія его должно напередъ согласиться въ понятіи о словѣ *сила*. Почему можно измѣрять силу двояко, лишь бы стали измѣрять ее сходно съ понятіемъ, которое мы имѣемъ объ этомъ словѣ. Такимъ образомъ мы будемъ и здѣсь принимать за мѣру силъ, какъ прежде, произведеніе массы на скорость;

и слѣд. будемъ разумѣть подъ силою тѣла сумму всѣхъ сопротивленій, нужныхъ на истребленіе движенія его.

О Сраженіи Эластическихъ тѣлъ.

366. *Эластическія* или *упругія* тѣла должны по данному о нихъ понятію (350) быть удобосжимательны; однако не надобно заключать, чтобъ онѣ должны быть тѣмъ удобосжимательнѣе, чѣмъ больше въ нихъ будетъ упругости. Мячь, набитой шерстью, не больше имѣетъ упругости, чѣмъ костяной шаръ, хотя сей послѣдній не такъ-то легко можно сжать, какъ предыдущій.

Какъ бы то ни было, однакожъ сжимательность бываетъ неразлучна съ упругостію. По силѣ сжимательности тѣло перемѣняетъ свою фигуру при дѣйствіи на него какой нибудь наружной силы, а по силѣ упругости оно силится воспринять прежній видъ. Но изъ всѣхъ эластическихъ тѣлъ, то есть, такихъ, которыя, здѣлавшись свободными, силятся принимать опять прежнюю свою фигуру, одни принимаютъ ее въ точности, а другіе отчасти только; сіи послѣднія называются *тѣлами несовершенно упругими*. Чтожъ касается до первыхъ, то онѣ могутъ возвращаться въ прежнее свое со-

стоянie сЪ большею или меньшею скоростiю, которой степеней бываютЪ весьма различны; и тѣ изЪ нихЪ, которыя послѣ удара возстановляются по такимЪ же точно степенямЪ, по какимЪ сжимались, называются *тѣлами совершенно упругими*. Во всякомЪ же другомЪ случаѣ они именуются просто *упругими тѣлами*. Мы будемЪ разсуждать здѣсь обЪ однихЪ только тѣлахЪ, совершенно упругихЪ.

Но замѣтимЪ, что при сраженiи такого рода тѣлЪ, то, которое имѣетЪ меньшую скорость, противополагаетЪ сопротивленiе, по дѣйствiю котораго происходитЪ сжатiе вЪ обоихЪ; возстановленiе фигуры слѣдуетЪ не только за сжатiемЪ, но и еще само послѣдуемо бываетЪ новымЪ измѣненiемЪ фигуры совсѣмЪ противнымЪ первому. За симЪ послѣдуетЪ еще другая перемѣна, приводящая тѣла вЪ такое состоянiе, вЪ какомЪ онѣ находились, будучи сжатыми, и такЪ далѣе; такимЪ образомЪ части каждаго тѣла получаютЪ, относительно кЪ центру своей тяжести, колебательное движенiе, то есть, такое движенiе, которое то отдаляетЪ части тѣла отЪ центра тяжести, то приближаетЪ ихЪ кЪ оному; потому что эти части стремятся кЪ прежней своей фигурѣ движенiемЪ ускори-

тельнымъ. Такого рода послѣдовательныя измѣненія примѣтны во многихъ тѣлахъ, и особенно въ звонкихъ, при пораженіи ихъ.

Однако не должно заключать, чтобъ эта колеблемость имѣла вліяніе на скорость, которую должны получить тѣла послѣ сраженія. Она не можетъ имѣть вліянія на движеніе центра тяжести ихъ, какъ то мы видѣли (288), потому что производится въ обоихъ тѣлахъ независимо отъ всякаго другаго движенія. Она не иное что есть, какъ взаимное дѣйствіе частей одного и тогожъ тѣла.

Вотъ какимъ образомъ должно разсуждать о сраженіи тѣлъ совершенно эластическихъ Когда два тѣла А и В (*фиг. 4*) столкнутся въ С, то сопротивленіе В противу А заставитъ ихъ сжиматься до тѣхъ поръ, пока оба центра тяжести и точки прикосновенія получатъ одинакую скорость; до этихъ поръ происходитъ въ эластическихъ тѣлахъ все тоже, что и при сраженіи твердыхъ, кромѣ измѣненія одной фигуры, которая ни въ чемъ не способствуетъ потерянному или пріобрѣтенному количеству движенія.

При измѣненіи фигуры оба тѣла сплющиваются равно съ каждой стороны, потому что отдаленнѣйшія части отъ прикосновенія

выступая впередъ скрѣе въ одномъ и медленнѣе въ другомъ, даже до конца сжатія, вбиваютъ промежуточныя части. По окончаніи сжатія части каждаго тѣла, ближайшія къ точкѣ прикосновенія, упираются другъ объ друга, и тогда напряженіе упругости производится въ противныя стороны относительно къ точкѣ прикосновенія; такимъ образомъ центры тяжести бываютъ увлекаемы въ разныя стороны со всѣмъ тѣмъ усиліемъ, съ какимъ возстановленіе частей происходитъ.

Отсюда явствуетъ, что ударяемое тѣло лишается, а ударяющее пріобрѣтаетъ столько скорости, сколько первое лишилось, а второе пріобрѣло ее во время сжатія. И хотя оба тѣла не вдругъ останавливаются на прежней своей фигурѣ, однако онѣ не имѣютъ уже больше дѣйствія другъ на друга; потому что сила, съ которою онѣ разпространяются, совершается по умаляющимся степенямъ, и слѣд. тѣла разстаются.

И такъ всѣ обстоятельства сраженія совершенно эластическихъ тѣлъ можно отнести къ слѣдующему одному правилу.

367. *Сыщи общую скорость, какую бы тѣла должны получить послѣ удара, будучи не упругими, и изъ удвоенной ее*

вычти скорость, которую каждое изъ нихъ имѣло до удара; въ этихъ двухъ остаткахъ получишь скорости каждаго тѣла послѣ сраженія ихъ. Надобно здѣсь замѣтить, что естьли тѣла будутъ двигаться до сраженія въ противныя стороны, то должно въ такомъ случаѣ ставить знакъ — предъ скоростью того, у котораго будетъ количества движенія меньше; и слѣд. въ примѣненіяхъ сего правила должно эту скорость складывать.

Ибо естьли при движеніи двухъ тѣлъ въ одну сторону положимъ V за скорость ударяющаго, U ударяемаго, а *u* за скорость, которой онѣ лишатся послѣ удара наподобіе твердыхъ тѣлъ; то V — *u* изобразитъ потерянную скорость ударяющимъ тѣломъ; а какъ при томъ отпущеніе упругости дѣйствуетъ въ противную сторону движенія и лишаетъ его столько скорости, сколько и само сжатіе, то останется въ немъ только скорость $u - (V - u)$, то есть, $u - V + u$, или $2u - V$. Что касается до ударяемаго, то $u - U$ будетъ представлять скорость, которую пріобрѣтаетъ оно по ударѣ; но мы видѣли, что оно по отпущеніи своей упругости пріобрѣтаетъ ее еще столькожъ, и слѣд. оно будетъ имѣть $u + u - U$, то есть,

$2u - U$. Къ этому случаю относится и тотъ, когда изъ двухъ тѣлъ одно будетъ находиться въ покоѣ до удара.

Естьли тѣла будутъ стремиться въ противныя стороны, то и тутъ надобно разсуждать о томъ, которое будетъ имѣть количества движенія больше, также, какъ въ предыдущемъ случаѣ. Чтожъ касается до другаго, то оно при ударѣ лишится наподобіе твердаго тѣла своей скорости, но за то пріобрѣтетъ другую въ противную сторону. Представимъ чрезъ u эту скорость; въ такомъ случаѣ упругость возстановитъ тѣло со скоростью $U + u$; придавъ ее къ u, которую бы оно должно имѣть наподобіе твердаго тѣла, получимъ $2u + U$.

368. Отсюда не трудно вывести формулы для сраженія упругихъ тѣлъ, потому что въ этихъ формулахъ кромѣ массъ и скоростей, бывшихъ до сраженія, ничего другаго не будетъ заключаться; стоитъ только вставить вмѣсто $2u - V$ и $2u \mp U$ величину количества u, выведенную по правиламъ (351 и слѣд.). Но какъ это весьма легко припомнить, то мы оставляемъ дѣлать вставки охотникамъ.

369. Замѣтимъ, что естьли одно изъ эластическихъ тѣлъ будетъ находиться въ

поко̂; то получаемая имъ скорость отъ удара бываетъ вдвое больше той, какую бы оно должно получить, будучи не упругимъ. Это само по себѣ слѣдуетъ изъ генеральнаго правила.

370. Дадимъ на эти правила нѣсколько примѣровъ. Положимъ сначала, что оба тѣла равны между собою, и что одно изъ нихъ находится въ покоѣ; въ такомъ случаѣ $\frac{MV}{M+m}$, изображающее (352) скорость посраженіи тѣлъ, принимаемыхъ твердыми, должно обратиться въ $\frac{MV}{2M}$, или въ $\frac{1}{2}V$. И такъ чтобъ получить скорость ударившаго тѣла послѣ сраженія, надобно (367) изъ удвоеннаго количества $\frac{1}{2}V$, или изъ V вычесть V; и слѣд. эта скорость будетъ равна нулю.

А чтобъ опредѣлить скорость получившаго ударъ, то должно изъ удвоеннаго $\frac{1}{2}V$ вычесть скорость нуль, которую оно имѣло до сраженія; но это даетъ V скоростью его, и слѣд. движеніе ударяющаго переходитъ все въ ударяемое. Отсюда слѣдуетъ, что естьли расположивъ многія эластическія тѣла равныя между собою на прямой линеѣ, ударишь потомъ какое нибудь изъ крайнихъ тѣломъ эластическимъ же и равнымъ каждому изъ нихъ, то кромѣ крайняго другаго ни одно не тронется. Естьли ударъ произведенъ будетъ вдругъ по двумъ эластическимъ тѣламъ, равнымъ съ предыдущими, то отскочатъ только послѣднее и предпослѣднее.

Положимъ, что оба тѣла стремятся къ одной сторонѣ, одно 5 унцій со скоростью по 6 футовъ въ секунду, а другое 7 унцій со скоростью по 2 фута

въ секунду. Скорость, которую получатъ эти тѣла послѣ удара наподобіе твердыхъ тѣлъ (351), будетъ $\frac{44}{12}$ или $3\frac{2}{3}$; и такъ естьли изъ удвоеннаго сего количества, то есть, изъ $7\frac{1}{3}$ вычтемъ скорости 6 и 2, которыя тѣла имѣли до удара, то получимъ $1\frac{1}{3}$ и $5\frac{1}{3}$ скоростями ударяющаго и ударяемаго послѣ сраженія.

Но естьли бы ударяемое, вмѣсто 7 унцій массы, имѣло ее 20; тогда скорость его послѣ сраженія, какъ тѣла твердаго, состояла бы изъ $\frac{70}{25}$, или изъ $2\frac{4}{5}$. Естьлижъ теперь вычтемъ изъ удвоеннаго сего числа, то есть, изъ $5\frac{3}{5}$ скорости 6 и 2, бывшія въ тѣлахъ до удара, то получимъ $5\frac{3}{5} - 6$ и $5\frac{3}{5} - 2$, или $-\frac{2}{5}$ и $3\frac{3}{5}$ скоростями ихъ послѣ удара; знакъ — показываетъ, что ударяющее отскочитъ назадъ.

Естьли два тѣла, имѣющія такія же массы и скорости, какія приписаны были имъ во второмъ примѣрѣ, будутъ стремиться другъ другу на встрѣчу; то скорости ихъ наподобіе твердыхъ тѣлъ должны быть послѣ сраженія $\frac{30 - 14}{12}$, или $1\frac{1}{3}$. Удвоивъ это количество, вычитаю изъ него 6 скорость ударяющаго до сраженія, и получаю $-3\frac{1}{3}$ скоростью его послѣ сраженія; знакъ — показываетъ, что оно отскочитъ назадъ со скоростью $3\frac{1}{3}$ фута. Чтожъ принадлежитъ до ударяемаго, то должно (367) къ тому же числу $1\frac{1}{3}$ удвоенному прибавить скорость его 2 до сраженія, и слѣд. $4\frac{2}{3}$ будетъ скоростью его послѣ сраженія.

371. Поелику скорости эластическихъ тѣлъ, стремящихся къ одной сторонѣ, означаются (367) послѣ сраженія чрезъ $2u$ —

V и $2u - U$ (*u* показываетъ такую скорость, которую бы онѣ должны имѣть послѣ сраженія, будучи не эластичискими); и потому разность сихъ двухъ скоростей, именно, $V - U$ бываетъ таковажъ, какова до сраженія. Эта разность называется *относителною скоростью*, и бываетъ всегда одинакова какъ до сраженія, такъ и послѣ его.

Но когда напротивъ тѣла до сраженія стремятся въ противуположныя стороны, то скорости ихъ послѣ сраженія будутъ $2u - V$ и $2u - U$, которыхъ разность $V + U$ будетъ представлять относительную скорость, съ которою онѣ приближались другъ къ другу до сраженія. И слѣд. та скорость, съ которою онѣ будутъ удаляться другъ отъ друга послѣ сраженія, останется такова же, съ какою онѣ прежде приближались; и такъ *вообще при сраженіи эластическихъ тѣлъ относительная скорость бываетъ одинакова прежде и послѣ сраженія.*

О Сраженіи и Сопротивленіи жидкихъ тѣлъ.

372. Вообразимъ, что какое нибудь тѣло M (*фиг.* 6) начнетъ ударять перпендикулярно къ одной своей сторонѣ, ограничен-

ной плоскою поверхностью AB, слои безконечно малыхъ тѣлъ безъ упругости, которыхъ вся сумма массъ, положимъ, равна m. Скорость его до сраженія есть V, а послѣ (352) $\frac{MV}{M+m}$. И такъ потерянная имъ скорость будетъ $V - \frac{MV}{M+m}$, то есть, $\frac{mV}{M+m}$, или просто $\frac{mV}{M}$, потому что мы предполагаемъ m безконечно малымъ количествомъ въ разсужденіи M. Слѣд. потерянное количество движенія M, или сопротивленіе его будетъ $\frac{mV}{M} \times M$, или mV.

Естьли теперь допустимъ, что въ безконечно малое время тѣло M подвигается на безконечно малое количество Bb, и что при каждомъ его движеніи слой пораженныхъ имъ частицъ убѣгаетъ, уступая мѣсто другимъ, которыя ударяются въ свою очередь; отсюда явствуетъ, что скорость при переходѣ изъ B въ b должна уменьшиться безконечно мало, и потеря движенія M при пораженіи каждаго слоя будетъ одинакова, и равна mV; слѣд. сумма сопротивленій, полагаемыхъ тѣлу слоями, находящимися между B и b, будетъ

mV повторенная столько разЪ, сколько можно вообразить частицЪ вЪ пространствѣ Bb. Но естьли представимЪ чрезЪ a безконечно малую высоту или толщину каждой частицы, то $\frac{Bb}{a}$ изобразитЪ число всѣхЪ могущихЪ помѣститься вЪ пространствѣ Bb; и слѣд. $mV \times \frac{Bb}{a}$ изобразитЪ сопротивленіе, встрѣчаемое тѣломЪ m вЪ безконечно малое время. Но масса m перваго слоя равняется (160) удѣльной величинѣ его, умноженной на густоту, то есть, по предположеніи D густотою, а S поверхностью AB, она должна быть равна $D \times S \times a$; слѣд. $m = DSa$; и слѣд. означивЪ сопротивленіе чрезЪ R, будемЪ имѣть $R = DSaV \times \frac{Bb}{a} = DSV \times Bb$.

А поелику Bb есть пространство, протекаемое тѣломЪ вЪ безконечно малое время, вЪ которое скорость можно предположить однообразною; и по тому представивЪ это время чрезЪ dt, получимЪ $Bb = Vdt$ (179). Слѣд. сопротивленіе $R = DSV^2dt$.

373. Естьли допустимЪ эти безконечно малыя тѣла, о которыхЪ теперь дѣло идетЪ, частицами или малѣйшими капельками какой

нибудь неегнетаемой жидкости, то замѣтимъ слѣдующее: поелику жидкости по натурѣ своей (295) сообщаютъ здѣланное на нихъ давленіе во всѣ стороны, и потому ближайшія капельки къ AB получивъ ударъ, сообщаютъ его немедленно прилежащимъ себѣ частицамъ, и заставляютъ ихъ протечь вмѣстѣ съ собою вдоль поверхности гнетущаго тѣла, дабы наполнить пространство, которое тѣло переносясь, оставляетъ послѣ себя пустымъ; эти послѣдуютъ за выдавленными и оставляютъ мѣсто новымъ, которыя получивъ ударъ, дѣйствуютъ наподобіе прежнихъ, и проч. Слѣд. выраженіе DSV^2dt изображаетъ вообще сопротивленіе, какое преодолѣваетъ тѣло M въ каждое мгновеніе, двигаясь въ такой жидкости, которая имѣетъ D густотою; по предположеніи, что каждой слой утекаетъ, какъ скоро бываетъ ударяемъ.

374. Слѣд. ежели другое тѣло двигаясь въ другой жидкости, коей густота D′, со скоростью *u*, будетъ гнести ее перпендикулярно поверхностью *s*; то представивъ чрезъ *r* сопротивленіе, преодолѣваемое имъ въ такое же мгновеніе *dt*, будемъ имѣть по той же причинѣ $r = D'su^2dt$. Отсюда должно заключить, что $R : r = DSV^2dt : D'su^2dt = DSV^2 : D'su^2$; то есть, *ежели два тѣла будутъ двигать-*

ся съ разными скоростями V и u въ двухъ жидкостяхъ, коихъ густоты представляютъ D и D′, перпендикулярно къ поверхностямъ S и s, то ощущаемыя ими сопротивленія на одно мгновеніе будутъ содержаться какъ густоты умноженныя на поверхности, и умноженныя еще на квадраты скоростей.

375. И такъ при одинакихъ поверхностяхъ и густотахъ сопротивленія будутъ находиться между собою въ квадратномъ содержаніи скоростей; ибо въ такомъ случаѣ $R : r = DSV^2dt : DSu^2dt = V^2 : u^2$. И слѣд. *сопротивленія, ощущаемыя попеременно тѣломъ со стороны одной и той же жидкости въ равныя мгновенія, будутъ содержаться какъ квадраты скоростей.*

376. И такъ не трудно теперь по общему правилу (374) найти содержаніе сопротивленіямъ, когда густоты или поверхности, или скорости будутъ одинаковы. И слѣд. изъ уравненія $R = DSV^2dt$ явствуетъ, что при всѣхъ впрочемъ равныхъ вещахъ сраженіе жидкости тѣмъ усильнѣе бываетъ, чѣмъ она гуще; такимъ образомъ морская вода противится больше, чѣмъ прѣсная, а воздухъ несравненно слабѣе отражаетъ ударъ сей послѣдней; и притомъ свойственная ему

сила весьма много измѣняется отъ теплоты и холоду, потому что эти двѣ вещи имѣютъ великое влїянїе на его густоту.

377. Естьли допустимъ жидкость эластическою и первой слой ея, получившїй ударъ, такимъ, что онъ, не здѣлавъ никакого впечатлѣнїя на послѣдующїе за нимъ, уничтожится; то все сказанное нами будетъ приличествовать и въ этомъ случаѣ, кромѣ совершенной величины, которая должна быть вдвое больше; это слѣдуетъ неминуемо изъ сказаннаго (269).

Однако надобно признаться, что начала, изъ которыхъ вывели мы законы для сраженїя жидкостей, не такъ достаточны, чтобъ по нимъ можно было опредѣлить совершенное ихъ сопротивленїе; причину этому покажемъ ниже, равно какъ и то, до коихъ поръ простирается совершенное измѣренїе сего сопротивленїя. Преподанныя формулы можно надежно употреблять при сравненїи сопротивленїй между самими ими.

378. Естьли теперь допустимъ тѣло M (*фиг.* 6) пребывающимъ въ покоѣ, и въ каждое мгновенїе dt получающимъ ударъ отъ величины жидкости равной ABba, движущей-

ся со скоростью V, и уничтожающейся немедленно послѣ удара; то такимъ же образомъ докажемъ, что безконечно малое количество движенія, переходящее по силѣ удара въ тѣло M, будетъ имѣть выраженіемъ тоже DSV^2dt. Отсюда заключимъ, что *тѣло ли будетъ ударять жидкость, или жидкость будетъ ударять тѣло, дѣйствіе останется въ обоихъ случаяхъ одинаково, лишь бы скорость не перемѣнилась.*

379. Покажемъ теперь вѣрнѣйшее измѣреніе сопротивленію или сраженію жидкостей.

Естьли представимъ чрезъ h высоту, съ которой бы должно упасть тяжелое тѣло для пріобрѣтенія скорости V, предполагаемой здѣсь въ тѣлѣ M; то по объявленному (176) получимъ $h = \frac{V^2}{2p}$, p означаетъ скорость свободнаго тѣла по силѣ тяжести его въ секунду времени. Извлекши изъ сего уравненія величину V^2, и вставивъ ее въ найденномъ (372) выраженіи для сопротивленія, будемъ имѣть $R = 2DShpdt$, и $R = 4DShpdt$ для упругихъ жидкостей. А поелику p изображаетъ скорость по силѣ тяжести въ одну секунду, то pdt будетъ означать такую же скорость, только въ мгновеніе dt, потому

что скорости, сообщаемыя тяжестью, находятся между собою вЪ содержаніи временЪ (172). СЪ другой стороны $2DSh$ изображаетЪ (160) призматическую или цилиндрическую массу трактуемой жидкости; эта призма должна имѣть основаніемЪ поверхность S, а высотою $2h$, то есть, вдвое больше той, сЪ какой тѣло упадая, можетЪ пріобрѣсти скорость настоящаго движенія поверхности вЪ жидкости; и слѣд. $2DShpdt$ означаетЪ количество движенія, пріобрѣтаемое призмою по свободному дѣйствію тяжести, то есть, означаетЪ вѣсЪ этой призмы. И такЪ вЪ силу предыдущихЪ правилЪ сопротивленіе, которое встрѣчаетЪ тѣло двигаясь вЪ жидкости находящейся вЪ покоѣ, или на оборотЪ ударЪ претерпѣваемый неподвижнымЪ тѣломЪ со стороны движущейся жидкости, равняется вѣсу такой призмы жидкости, которая будетЪ имѣть основаніемЪ ударяемую поверхность, а высотою вдвое больше той, сЪ какой упадая тѣло пріобрѣтаетЪ скорость, равную предполагаемому движенію тѣла или жидкости. Но вЪ упругихЪ жидкостяхЪ мѣрою сопротивленія должно принимать двойной вѣсЪ сей призмы.

380. Разные авторы, разсуждавшіе о сопротивленіи жидкостей, весьма не согласны вЪ мнѣніи своемЪ о мѣрѣ совершенной величины онаго; нѣкото-

рые изъ нихъ полагаютъ ее въ половину меньше опредѣленной нами теперь. Испытатели также противны въ своихъ мнѣнїяхъ.

И такъ предыдущую теорїю можно употреблять, какъ мы уже сказали, для одного сравненїя сопротивленїй; но для настоящаго измѣренїя она будетъ недостаточна, потому что многїя вещи опущены въ ней, которыя однакожъ требуютъ великаго вниманїя.

Нѣтъ нималаго сомнѣнїя, что части жидкости, которая въ движенїи своемъ ударяетъ какое нибудь тѣло, находящееся въ покоѣ, хотя скользя о поверхность его, и будутъ совращаться со своего пути, но онѣ отнюдь не перемѣнятъ скорости около этой поверхности. Это обстоятельство весьма важнымъ почитается при дѣйствїи жидкости на тѣло. Но гдѣ должно начинаться совращенїе нитей жидкости? На какое разстоянїе онѣ совращаются, и ускоряется ли движенїе ихъ по сторонамъ тѣла? По какому закону ускоряется это движенїе? и пр. Все это намъ не извѣстно, и вѣроятно останется еще неизвѣстнымъ на долгое время.

Не смотря на это, Невтонъ соображаясь съ гипотезами, довольно правдоподобными касательно до увеличивающейся скорости частей жидкости около поверхности тѣла, нашелъ, что ударъ жидкости о плоскую поверхность, равняется вѣсу такой призмы ея, которая будетъ имѣть основанїемъ туже поверхность, а высотою такое разстоянїе, съ котораго тяжелое тѣло упадая, прїобрѣтаетъ одинакую скорость съ движенїемъ настоящей жидкости. Здѣланные имъ опыты довольно подтверждаютъ сїю теорїю.

Хотя воздухъ и эластическая жидкость, но сопротивленїе его по теорїи и наблюденїямъ Невтона

измѣряется такимъ же образомъ. А какъ по здѣланному предположенїю (377) надобно бы употреблять для этого двойную мѣру; съ другой же стороны обращая вниманїе на движенїе тѣла въ воздухѣ, замѣчаемъ, что прилежащїе слои къ передней части его сгущаются до нѣкотораго только разстоянїя, и потому надобно заключить, что совершенное количество движенїя, какого онѣ способны лишить, не должно измѣряться такъ, какъ бы каждой слой находился отдѣльно.

381. Хотя судя по опытамъ Г. Бугера, Г. Марїотта и Кавалера де Борда, находимъ теорїю Невтона не слишкомъ вѣрною на практикѣ; но поелику она меньше другихъ несогласна съ нею, то мы намѣрены ей придерживаться, И такъ мы будемъ принимать за мѣру совершеннаго сопротивленїя всякой жидкости противъ плоской поверхности, вѣсъ призмы ея, имѣющей основанїемъ туже поверхность, а высотою такое разстоянїе, съ котораго упадая тяжелое тѣло, прїобрѣтаетъ одинакую скорость съ ударомъ жидкости.

382. Но естьли положимъ, что высота призматической жидкости, которой вѣсомъ измѣряется сопротивленїе, содержится къ высотѣ $2h = n : 1$, гдѣ n означаетъ такое число, которое должно опредѣлить опытомъ; то эта высота будетъ равна $2nh$, и слѣд. вѣсъ призмы $= 2nDShpdt$; отсюда выходитъ $R = 2nDShpdt$, и слѣд. по Невтонову заключенїю n будетъ $= \frac{1}{2}$. А поелику $VV = 2ph$, то будемъ имѣть также $R = nDSV^2dt$.

Примѣчанїе. I.

383. Предписанные законы на прямое сраженїе жидкостей показываютъ, что онѣ бываетъ пропорцїонально густотѣ жидкости, умноженной на проти-

женїе ударяемой поверхности, и еще на квадратъ скорости, съ какою совершается ударенїе.

Опытъ довольно удостовѣряетъ въ этой истиннѣ, что сопротивленїя пропорцїональны квадрату скорости. Но по рачительнѣйшимъ наблюденїямъ Кавалера де Борда не выходитъ совершенной пропорцїональности сопротивленїй къ поверхностямъ или густотамъ. Правда, что теорїя весьма мало не согласна съ практикой какъ въ разсужденїи этихъ двухъ пунктовъ, такъ и въ разсужденїи совершенной мѣры сопротивленїя; однакожъ по всей строгости не можно почитать сїи законы настоящими правилами, которыя остаются еще для насъ не извѣстными.

Примѣчанїе II.

384. Отсюда явствуетъ, что ударенїе жидкости о поверхность твердаго тѣла, или сопротивленїе, преодолѣваемое движимымъ въ жидкости, не одинаково съ ударенїемъ тѣла объ тѣло опредѣленной или конечной величины. Это послѣднее никакъ не можно (360) сравнивать съ вѣсомъ тѣлъ, а сопротивленїе жидкостей можно.

Разность сїя происходитъ отъ того, что при ударѣ одного тѣла объ другое конечной величины перемѣна производится мгновенно и въ конечной его скорости; но при ударенїи тѣла движущагося съ конечною скоростїю въ жидкости, это тѣло теряетъ въ каждое мгновенїе безконечно малую частицу своей скорости, потому что оно описывая въ мгновенїе безконечно малое пространство, извергаетъ или ударяетъ количество матерїи также безконечно малое. И такъ потерю движенїя его можно сравнить съ тою скоростью, какую въ тѣлахъ производитъ или уничтожаетъ тяжесть въ каждое мгновенїе.

385. Отсюда можно заключить, что ударЪ между двумя тѣлами, погруженными вЪ противящейся серединѣ, производится, ежели онЪ мгновененЪ, такЪ же, какЪ вЪ свободной серединѣ; то есть, скорость, сЪ какою ударяющее тѣло достигаетЪ ударяемое, раздѣляется между обоими такЪ, какЪ бы онѣ находились не вЪ сопротивляющейся серединѣ.

И слѣд. баба AB (*фиг.* 7) ударяющая сваю CD, прїобрѣтаетЪ паденїемЪ своимЪ по пространству OC такую скорость, которая опредѣляется по объявленному (173); она раздѣляетЪ эту скорость сЪ сваею по даннымЪ (352) правиламЪ; то есть, свая сначала углубляется со скоростью $= \frac{MV}{M+m}$, гдѣ V будетЪ означать прїобрѣтенную скорость паденїемЪ бабы, M массу ея, а m массу сваи.

Естьли бы земля, вЪ которую свая опускается, могла повсюду противиться одинаково, то есть, ежели бы она была такова, чтобЪ причиняемое ею уменьшенїе скорости, во время углубленїя сваи на количество безконечно малое, было пропорцїонально безконечно малому пространству, описанному мгновенно, то сумма всѣхЪ сопротивленїй была бы вЪ такомЪ случаѣ пропорцїональна всему углубленїю; и слѣд. разныя углубленїя сваи при каждомЪ паденїи бабы будучи пропорцїональны всему сопротивленїю, должны бы также быть пропорцїональны и количеству истребленнаго движенїя, то есть, MV. А какЪ V (172) пропорцїонально квадратному корню высоты, сЪ которой упадаетЪ баба, то должно заключить, что послѣдовательныя углубленїя сваи будутЪ содержаться между собою какЪ квадратные корни изЪ высотЪ разныхЪ паденїй бабы; такимЪ же образомЪ разсуждалЪ и Г. БелидорЪ о углубленїяхЪ сваи вЪ однородной землѣ.

Кто жъ не замѣтитъ, какъ трудно допустить и въ самыхъ однородныхъ земляхъ, сопротивленіе пропорціональнымъ количеству мгновеннаго углубленія. Естьли бы сопротивленіе зависѣло отъ одного упорства извергаемыхъ частей земли, то вѣроятно оно было бы пропорціонально (375) квадрату скорости; но какъ примѣшивается тутъ къ упорству и вязкость еще частей, то очевидно того допустить не льзя.

И такъ весьма трудно опредѣлить однимъ разсужденіемъ, по какому закону сопротивляются однородныя земли. Но опытъ, кажется, довольно достаточно для практики удостовѣряетъ, что въ глинистой землѣ дѣлаемыя углубленія одинакимъ тѣломъ, упадающимъ съ разныхъ высотъ, дѣйствительно пропорціональны симъ высотамъ, и слѣд. квадрату скорости, съ какою начинается углубленіе; описанныя пространства бываютъ (167) пропорціональны квадратамъ скоростей тогда только, когда сила увеличивающая или умаляющая движеніе дѣйствуетъ постоянно. Слѣд. опытъ показываетъ, что сопротивленіе, о какомъ теперь дѣло идетъ, должно быть постоянно, то есть, при каждомъ равномъ мгновеніи углубленія должно истощиться одинакое количество движенія.

И такъ допустивъ сей законъ, основанный на опытѣ, должно заключить, что углубленіе пропорціонально $\frac{M^2V^2}{(M+m)^2}$, потому что скорость, съ какою начинается углубленіе, есть $\frac{MV}{M+m}$. Естьли представимъ чрезъ h высоту упавшей бабы, то по причинѣ, что (176) $2ph = V^2$, углубленіе будетъ также пропорціонально $\frac{2pM^2h}{(M+m)^2}$, или по причинѣ, что p, M и m

остаются всегда одинаковы, углубленіе будетъ пропорціонально h, то есть, высотѣ паденія бабы.

Но естьли пожелаемъ сравнить углубленія, происходящія отъ дѣйствія разныхъ бабъ на разныя сваи въ одинакой землѣ, то онѣ должны быть не только пропорціональны квадратамъ скоростей, но и еще этимъ квадратамъ умноженнымъ на массы, побуждаемыя сими скоростями; то есть, углубленіе будетъ пропорціонально $\frac{M^2V^2}{(M+m)^2} \times (M+m)$, или пропорціонально $\frac{M^2V^2}{M+m}$, или $\frac{2pM^2h}{M+m}$, или просто $\frac{M^2h}{M+m}$. Отсюда явствуетъ, что при равномъ паденіи двухъ бабъ, углубленія увеличиваются въ большемъ содержаніи массъ ихъ.

О Сопротивленіи на плоскихъ Поверхностяхъ косыхъ.

386. Здѣлаемъ переходъ къ сопротивленію на поверхностяхъ, занимающихъ косое положеніе; и для большей ясности допустимъ жидкость движущеюся.

Представимъ себѣ такое тѣло (*фиг. 8*), котораго плоскія стороны EFGL, AELD, AEFB перпендикулярны между собою, а прочія три произвольной величины и положенія; и положимъ, что изъ этихъ послѣднихъ одна только ABCD подвержена ударенію жидкости, движущейся по направленію Tg параллельному съ AE, или перпендикулярному къ EFGL. Вообразимъ къ

плоскости ABCD перпендикуляръ gR', и проведемъ по этой линеѣ и линеѣ gT плоскость. Эта плоскость будетъ перпендикулярна къ двумъ плоскостямъ ABCD, EFGL; естьли вообразимъ ее продолженною, то она здѣлаетъ въ тѣлѣ сѣченіе MHIN, наклоненное къ двумъ плоскостямъ AELD, AEFB. А какъ эта же плоскость проходитъ по прямой линеѣ gT, представляющей направленіе жидкости, то части жидкости должны приходить къ поверхности ABCD по направленіямъ параллельнымъ съ сѣченіемъ MHIN; такъ что по разсѣченіи тѣла на множество параллельныхъ слоевъ съ MHIN, можно здѣлать о каждомъ слоѣ такое же заключеніе, какое здѣлаемъ объ MHIN.

Положимъ *p* (*фиг.* 9) за ту частицу, которая приходитъ къ поверхности, представленной теперь чрезъ MN; допустимъ также, что направленіе и скорость V этой частицы будетъ изображать *p*G. Естьли по сей линеѣ, какъ по діагонали, начертимъ параллелограммъ *p*KGL, котораго бы бокъ *p*K былъ расположенъ на MN, а бокъ *p*L здѣланъ перпендикулярenъ къ MN, и когда при томъ вообразимъ, что въ самую минуту приближенія частицы, скорость ея *p*G составляется изъ двухъ другихъ, то есть,

изъ pK имѣющей направленіе по MN и pL перпендикулярной къ этой поверхности; то не трудно примѣтить, что эта частица будетъ дѣйствовать на тѣло одною только скоростью по направленію pL; ибо въ силу скорости по pK она будетъ двигаться вдоль поверхности, которую предполагаемъ совершенно гладкою и безъ тренія, и которой частица p не можетъ сообщить движенія. И такъ ударъ, производимый частицею p, изобразится количествомъ движенія $p \times pL$. А какъ и прочія частицы, приходящія въ тоже время къ другимъ точкамъ поверхности, имѣютъ одинакую съ тою скорость и параллельное направленіе; то здѣлавъ для каждой подобное составленіе, найдемъ, что всѣ онѣ будутъ имѣть скорость pL, перпендикулярную къ поверхности; такимъ образомъ означивъ чрезъ m сумму ихъ массъ, получимъ въ $m \times pL$ количество движенія, дѣйствующаго на тѣло перпендикулярно къ поверхности.

А чтобъ судить теперь о количествѣ движенія, происходящемъ въ безконечно малое время dt, то должно опредѣлить число слоевъ жидкости, могущихъ притти къ поверхности въ это время dt. Но это число безъ сомнѣнія должно быть равно такому,

какое бы могло повстрѣчать само тѣло, двигаясь со скоростью V. Вообразимъ, что тѣло движется въ мгновеніе dt со скоростью, которая переноситъ поверхность ABCD (*фиг.* 8), представленную (*фиг.* 10) параллельно къ самой ей въ $abcd$; точка g описываетъ на gT безконечно малую линею gr. Отсюда явствуетъ, что, по проведеніи gs перпендикулярно на $abcd$, не можно больше вообразить слоевъ жидкости между ABCD и $abcd$, какъ столько, сколько толщина одной изъ означенныхъ частицъ ея можетъ содержаться въ разстояніи gs; и такъ принявъ a за толщину этой частицы, получимъ въ $\frac{gs}{a}$ выраженіе всего числа слоевъ; слѣд. $m \times p\mathrm{L} \times \frac{gs}{a}$ означитъ количество движенія, сообщенное тѣлу въ мгновеніе dt перпендикулярно къ поверхности ABCD.

Но поелику масса m перваго слоя равна величинѣ его умноженной на густоту, то принявъ S за поверхность ABCD, и D за густоту жидкости, будемъ имѣть $m = \mathrm{D}Sa$; и слѣд. количество движенія, сообщаемое тѣлу, будетъ $\mathrm{D} \times S \times p\mathrm{L} \times gs$. Теперь стоитъ только опредѣлить $p\mathrm{L}$ и gs.

Естьли представимъ чрезъ i уголъ TgM (*фиг.* 8), состоящій изъ направленія движенія каждой частицы и поверхности (называемый *угломъ ударенія* или *паденія*) и равный MpO (*фиг.* 9) и GpK; то въ прямоугольномъ треугольникѣ GpK, получимъ $1 : pG =$ *син.* $i : GK$ или pL; слѣд. $pL = pG \times$ *син.* $i = V \times$ *син.* i, потому что pG означаетъ скорость.

Для опредѣленія gs (*фиг.* 10), должно соединить двѣ точки r и s прямою линеею, отъ чего произойдетъ треугольникъ grs прямоуголенъ въ s, потому что gR' или gs перпендикулярны къ плоскости $abcd$, въ которой находится rs; а какъ притомъ уголъ grs этого треугольника равенъ углу TgM (*фиг.* 8), то есть равенъ i, то получимъ 1: *син.* $i = gr : gs$; слѣд. $gs = gr \times$ *син.* i, или потому что gr предоставляетъ описанное пространство со скоростью V въ продолженіе dt, $gs = Vdt$; отсюда выходитъ $gs = Vdt \times$ *син.* i.

И такъ вставивъ эти величины pL и gs въ количествѣ $D \times S \times pL \times gs$, и представивъ чрезъ R' сопротивленіе или удареніе, будемъ имѣть $R' = DSV^2 dt$ *син.*$^2 i$; или вообще, по силѣ здѣланнаго (382) замѣчанія $R' = nDSV^2 dt$ *син.*$^2 i$.

387. Замѣтимъ теперь, что выраженіемъ сопротивленія, бываемаго тогда, когда плоскость противуполагается перпендикулярно, найдено (382) $R = nDSV^2dt$; и потому заключимъ, что $R : R' = nDSV^2dt : nDSV^2dt$ $син.^2 i = 1 : син.^2 i = 1^2 : син.^2 i$; слѣд. *при всѣхъ вещахъ равныхъ сопротивленіе, или прямое удареніе жидкости къ косому сопротивленію, дѣйствующему на туже поверхность, содержится такъ, какъ квадратъ радіуса къ квадрату синуса паденія.* И такъ по одному сопротивленію можно заключать о другомъ; то есть, по прямому о косомъ, и на оборотъ.

388. Исчисленное нами сопротивленіе есть перпендикулярное къ поверхности. Но весьма часто бываетъ нужно знать дѣйствіе его въ какомъ нибудь другомъ направленіи. Посмотримъ, какъ должно поступать въ такомъ случаѣ.

Ежели эта сила (*фиг.* 8) будетъ направлена перпендикулярно къ поверхности ABCD, которая сама имѣетъ косое положеніе въ разсужденіи плоскостей AEFB, AELD, EFGL, предполагаемыхъ взаимно перпендикулярными; то она будетъ стремиться сообщить тѣлу движеніе по направленіямъ,

перпедикулярнымъ къ каждой изъ этихъ трехъ плоскостей.

Для опредѣленія же каждаго изъ этихъ трехъ усилій, надобно раздѣлить силу R′ перпендикулярную къ ABCD на три другія, перпендикулярныя къ означеннымъ тремъ плоскостямъ; но можно еще скорѣе въ этомъ успѣть, опредѣливши сначала какое нибудь одно изъ усилій ниже слѣдующимъ образомъ; ибо по оному не трудно послѣ заключить о другихъ.

389. И такъ предложимъ слѣдующій общій вопросъ: по извѣстной силѣ R′ (*фиг.* *12*), направленной перпендикулярно къ плоскости ABCD, опредѣлить усиліе ея же въ перпендикулярномъ направленіи къ плоскости EFGL также извѣстной.

По направленію gR′ силы R′ вообразимъ такую плоскость, которая вмѣстѣ была бы перпендикулярна къ двумъ плоскостямъ ABCD и EFGL. Положимъ, что MI и HI будутъ представлять сѣченія сей плоскости съ ABCD и EFGL, а TK общее сѣченіе двухъ послѣднихъ; MI и HI будутъ перпендикулярны къ TK, и уголъ MIH представитъ мѣру склоненія двухъ плоскостей ABCD и EFGL.

Естьли продолжимъ линею $R'g$, и взявъ ее за діагональ, здѣлаемъ параллелограмъ $gROQ$ въ плоскости MIH, котораго бы бока gQ и gR были, первой перпендикуляренъ, а второй параллеленъ къ плоскости $EFGL$; то силу R' могутъ замѣнить въ такомъ случаѣ двѣ другія gR и gQ. Но не трудно примѣтить, что сила gR будучи параллельна съ плоскостью $EFGL$, не можетъ сообщить плоскости $ABCD$ никакого такого движенія, которое бы или приближало ее къ плоскости $EFGL$, или бы удаляло ее отъ оной; но будетъ двигать ее параллельно къ самой себѣ, и слѣд. разстояніе ея отъ плоскости $EFGL$ останется всегда одинаково; слѣд. единое стремленіе плоскости $ABCD$, получаемое отъ силы R' для перпендикулярнаго приближенія къ $EFGL$, будетъ gQ. Посмотримъ же теперь, какой величины должно быть gQ

По правиламъ раздѣленія силъ, получимъ (назвавъ Q силу gQ) $R' : Q = gO : gQ$. Естьли продолжимъ gQ до пересѣченія ея съ HI въ S, то не трудно примѣтить, что два прямоугольные треугольника OgQ, gSI будутъ подобны, потому что сверхъ прямыхъ угловъ въ Q и S, они будутъ имѣть еще два равные угла OgQ, gIS дополненія угла SgI. Слѣд. $gO : gQ = Ig : IS$; слѣд. $R' : Q = IG : IS$. А какъ въ

прямоугольномъ треугольникѣ gSI можно по-
слать Ig : IS = 1 : *син.* IgS = 1: *кос.* SIg; то
будемъ имѣть наконецъ R′ : Q = 1: *кос.* SIg;
отсюда заключимъ, что *совершенное стре-
мленіе силы R, перпендикулярной къ пло-
скости ABCD содержится къ стремленію,
выходящему изъ перваго по направленію
перпендикулярному къ какой нибудь дру-
гой плоскости EFGL, какъ радіусъ къ ко-
синусу склоненія двухъ плоскостей.*

390. Что касается до усилія gR па-
раллельнаго съ IH, по поелику выходитъ
изъ него два другія перпендикулярныя къ
двумъ плоскостямъ AEFB и AELD; и слѣд.
чтобъ судить объ этихъ двухъ усиліяхъ,
должно раздѣлить gR на два другія перпен-
дикулярныя къ упомянутымъ двумъ плоско-
стямъ, перпендикулярнымъ между собою и
къ плоскости EFGL. Но не трудно примѣ-
тить, что никакое изъ трехъ усилій, на
которыя раздѣляется въ такомъ случаѣ сила
R′, не можетъ способствовать дѣйствію двухъ
прочихъ по той причинѣ, что всѣ онѣ
взаимно перпендикулярны; слѣд. каждое изъ
нихъ можно опредѣлить вышепоказаннымъ
образомъ, то есть, раздѣливъ просто силу
R′ на двѣ, на одну перпендикулярную, а
другую параллельную съ трактуемою пло-

скостью. Такимъ образомъ сила R' будетъ содержаться къ каждому изъ трехъ стремленій, происходящихъ отъ нее перпендикулярно къ плоскостямъ EFGL, AEFB, AELD перпендикулярныхъ взаимно, такъ, какъ радіусъ къ косинусу склоненія плоскости ABCD къ каждой изъ этихъ трехъ плоскостей.

391. Вотъ содержаніе трехъ стремленій; но для употребленія, какое намъ хочется изъ него здѣлать, должно перемѣнить его на другое.

Допустимъ, что ABCD (*фиг. 11*) представляетъ какую нибудь плоскую поверхность. Вообразимъ изъ всѣхъ ея точекъ перпендикуляры на какую нибудь плоскость A'B'FE, пересѣкаемую плоскостью ABCD въ прямой линеѣ EF. Эти перпендикуляры означатъ на плоскости A'B'FE поверхность A'B'C'D', которая называется проэкціею ABCD, и которая будетъ содержаться къ той, какъ косинусъ склоненія двухъ плоскостей къ радіусу.

Ибо естьли вообразимъ въ плоскости ABCD двѣ прямыя линеи MNP, *mnp* въ безконечно близкомъ другъ отъ друга разстояніи, и перпендикулярныя къ общему сѣченію FE, и въ тоже время къ проэкціи ихъ M'N'P,

$m'n'p$; то не трудно примѣтить, что двѣ поверхности MmpP, $M'm'p$P по причинѣ взаимной ихъ высоты pP будутъ содержаться какъ MP : M'P. По той же причинѣ поверхности NnpP, $N'n'p$P будутъ содержаться между собою какъ NP : N'P, или = MP : M'P, потому что MM' параллельна съ NN'; слѣд. поверхности $MmnN$, $M'm'n'N'$ будутъ также содержаться = MP : M'P. Но въ прямоугольномъ треугольникѣ MM'P можно вывести такую пропорцію MP : M'P = 1 : *син.*PMM', и какъ притомъ можно всегда принимать двѣ подобныя поверхности состоящими изъ одинакаго числа сходственныхъ маленькихъ трапецій, каковы $MmnN$, $M'm'n'N'$, которыя будутъ содержаться между собою = 1 : *син.* PMM'; то можно заключить вообще, что всякая плоская поверхность ABCD къ проэкціи своей содержится = 1 : *син.*PMM'. А поелику линеи MP, M'P перпендикулярны къ общему сѣченію EF, то уголъ MPM', заключающійся между ими, будетъ измѣрять склоненіе двухъ плоскостей ABCD, A'B'C'D'; притомъ же въ прямоугольномъ треугольникѣ MPM', уголъ PMM' есть дополненіе сего склоненія; отсюда заключимъ вообще, что *есть-ли на какой нибудь плоскости здѣлана будетъ проэкція плоской поверхности, то эта поверхность будетъ содержаться къ*

проэкціи своей, какъ радіусъ къ косинусу склоненія двухъ плоскостей.

392. Поелику при раздѣленіи силы R' (*фиг. 12*) на три другія (390), перпендикулярныя взаимно и къ тремъ извѣстнымъ также перпендикулярнымъ плоскостямъ, эта сила R' содержится къ каждой изъ послѣднихъ, какъ радіусъ къ косинусу угла, которой составляется изъ плоскости ABCD и другой такой, къ которой простая сила R будетъ перпендикулярна; то представивъ чрезъ r, r', r'' дѣйствія стремленія жидкости на поверхность ABCD, дѣйствія перпендикулярныя къ каждой изъ трехъ плоскостей EFGL, AEFB, AELD, чрезъ s s', s'' тѣ поверхности, которыя произходятъ изъ проэкціи поверхности ABCD, означенной чрезъ S на каждой плоскости, будемъ имѣть $R' : r : r' : r'' = S : s : s' : s''$; при томъ же найдено было выше $R' = nDSV^2 dt$ *син*$^2 i$, и слѣд. по выводкѣ изъ означенныхъ содержаній слѣдующихъ трехъ пропорцій $R' : r = S : s$; $R' : r' = S : s'$; $R' : r'' = S : s''$, и по вставкѣ величины R', получимъ $r = nDsV^2 dt$ *син*$^2 i$, $r' = nDs'V^2 dt$ *син*$^2 i$, $r'' = nDs''V^2 dt$ *син*$^2 i$.

И такъ *желая узнать для какой нибудь плоскости ABCD, подверженной біе-*

нію жидкости, дѣйствіе удара въ извѣстномъ направленіи, вообрази проэкцію этой поверхности на такую плоскость, къ которой бы данное направленіе было перпендикулярно; потомъ опредѣливъ (382) ударъ, какой бы эта проэкція должна была претерпѣть, двигаясь сама перпендикулярно, умножь его на квадратъ синуса ударенія жидкости о настоящую поверхность ABCD.

393, По этимъ же правиламъ можно опредѣлить усилія тѣла противъ удара или сопротивленія жидкостей по тремъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, будетъ ли ударяемая сторона его состоять изъ многихъ поверхностей плоскихъ различно склоненныхъ, или изъ кривой; ибо въ послѣднемъ случаѣ можно представить кривую поверхность, раздѣленную на безчисленное множество маленькихъ плоскихъ.

О сопротивленіи, которое испытуетъ тѣло всякой круглой фигуры (solide de révolution), *двигаясь по оси.*

394. Естьли вообразимъ поверхность тѣла круглой фигуры, движущагося по направленію оси своей (мы разумѣемъ такое тѣло, которое произходитъ изъ обращенія какой нибудь

поверхности около прямой линеи) раздѣленною на зоны плоскостями, безконечно между собою близкими и перпендикулярными кѣ оси; то не трудно примѣтить, что сопротивленіе на все пространство зоны можетѣ приведено быть вѣ одно усиліе, имѣющее направленіе по оси обращенія; потому что вообразивѣ чрезѣ ось двѣ плоскости перпендикулярныя между собою, и сыскавѣ, какѣ показано было выше, усилія противу каждой части зоны перпендикулярныя кѣ этимѣ плоскостямѣ, ясно увидимѣ, что всѣ эти усилія, по причинѣ правильной фигуры зоны, уничтожатся.

Чтожѣ касается до усилій параллельныхѣ сѣ осью на разныя части той же зоны, то не трудно изѣ предыдущаго заключить, что всѣ онѣ будутѣ равны и одинаково раздѣлены вокругѣ оси; слѣд. произойдетѣ одно только, имѣющее направленіе по самой оси.

395. А чтобѣ опредѣлить величину сего усилія, то должно представить, что AMR (*фиг. 13*) есть кривая линея произведшая тѣло; послѣ чего M*m* будетѣ бокомѣ производителемѣ (générateur) зоны. Не трудно примѣтить, что всѣ части поверхности зоны равно наклоняются кѣ оси AB, и что общее

ихъ склоненіе измѣряется угломъ Mmr, которой состоитъ изъ бока Mm кривой линеи и ордонаты pm. И такъ уголъ паденія, представленный (386) чрезъ i, будетъ $= r$Mm. Наконецъ назвавъ AP, x; PM, y; получимъ Mm : rm или $ds : dy = 1 :$ *син.* rMm; слѣд. *син.* rMm или *син.* $i = \frac{dy}{ds}$.

Притомъ же замѣчаемъ, что когда здѣлана будетъ проэкція зонѣ, произшедшей отъ обращенія бока Mm, на плоскости перпендикулярной къ AB, то эта проэкція представитъ (*фиг.* 14) корону M$rqom$Q, которая будетъ имѣть широтою Mr, а радіусомъ PM, линею одинакой величины съ mr и PM (*фиг.* 13); и слѣд по причинѣ, что площадь этой короны $=$ M$r \times$ *окр.* PM, площадь проэкціи зоны будетъ $= dy \times$ *окр.* y, или (по представленіи чрезъ $r : c$ содержанія радіуса къ окружности) будетъ $= \frac{cydy}{r}$; и такъ (392) усиліе или сопротивленіе по оси на зону будетъ $= n\mathrm{DV}^2 dt \times \frac{cydy}{r} \times \frac{dy^2}{ds^2}$, или $\frac{n\mathrm{D}c}{r} \mathrm{V}^2 dt \times \frac{dy^3}{ds^2}$, и слѣд. цѣлое сопротивленіе на всю поверхность зоны будетъ $= \int \frac{n\mathrm{D}c}{r} \mathrm{V}^2 dt \times$

$\frac{ydy^3}{ds^2}$, или $\frac{nDc}{r} V^2 dt \int \frac{ydy^3}{ds^2}$; потому что здѣсь кромѣ фигуры тѣла нѣтъ ничего перемѣннаго.

Такова формула для опредѣленія сопротивленія тѣлъ, происходящихъ отъ обращенія и движущихся по оси.

396. Здѣлаемъ примѣненіе этой формулы къ шару, какъ такому тѣлу, которое весьма употребительно въ Артиллеріи.

Уравненіе круга ABM (*Фиг.* 15) производителя шара, состоитъ изъ $yy = ax - xx$ (*Алг.* 219), по представленіи AP чрезъ x, AB чрезъ a, и PM чрезъ y. Слѣд. $ydy = \frac{1}{2} adx - xdx$. Естьли проведемъ радіусъ MC, то въ подобныхъ треугольникахъ Mmr, MPC получимъ $Mm : mr = MC : CP$, или $ds : dy = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a - x$; слѣд. $\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a}$; слѣд. $\frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{(\frac{1}{2}a - x)^3}{\frac{1}{4}a^2} dx$; слѣд. (66) $\int \frac{ydy^3}{ds^2} = C - \frac{(\frac{1}{2}a - x)^4}{a^2}$. Но по предположеніи $x = o$, интегралъ долженъ быть также равенъ o; слѣд. $C = \frac{1}{16}a^2$, и слѣд. $\int \frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{1}{16}a^2 - \frac{(\frac{1}{2}a - x)^4}{a^2}$.

А чтобъ получить полную величину $\int \frac{ydy^3}{ds^2}$, то должно замѣтить, что при движеніи этого тѣла по направленію AB, одна только передняя его гемисфера DAE ражается; слѣд. за величину $\int \frac{ydy^3}{ds^2}$ должно принимать пространство отъ A до C; то есть, должно въ найденномъ интегралѣ здѣлать $x = \frac{1}{2}a$; по-

слѣ чего $\int \frac{ydy^3}{ds^2}$ будетъ $= \frac{1}{16} a^2$, и слѣд. сопротивленіе, имѣющее выраженіемъ $\frac{nDc}{r} V^2 dt \int \frac{ydy^3}{ds^2}$, превратится въ $nDV^2 dt \times \frac{ca^2}{16r}$;

Но сопротивленіе, которому подвергается большой кругъ DE, движущійся перпендикулярно, будетъ (382) $nDV^2 dt \times \frac{ca^2}{8r}$, потому что площадь круга равняется $\frac{ca^2}{8r}$; слѣд. *усиліе шара въ половину меньше усилія большаго круга его.*

О прямолинейномъ Движеніи тѣлъ въ противящихся серединахъ.

397. Сопротивленіе, которое противополагаютъ середины движенію тѣлъ, можетъ вообще произвести два дѣйствія. Во первыхъ оно перемѣняетъ направленіе движенія, когда направленіе, по которому дѣйствуетъ составное отраженіе изъ всѣхъ частныхъ на поверхность подверженную оному, не будетъ находиться на одной прямой линеѣ, съ направленіемъ дѣйствительнаго движенія тѣла; вовторыхъ оно измѣняетъ скорость движимаго.

Поелику мы намѣрены разматривать такія тѣла, которыхъ части бываютъ симметрически расположены относительно къ направленію движенія, и которыя по свойству

такого расположенія не могутЪ уклоняться вЪ путяхЪ своихЪ; и потому мы будемЪ разсуждать здѣсь о движеніи тѣлЪ вЪ противящихся серединахЪ, имѣя вЪ виду одну только потерю скорости ихЪ. Мы станемЪ сперва разсуждать о движеніи тѣлЪ лишенныхЪ тяжести, или, что все равно, о тѣлахЪ движущихся по горизонтальной плоскости безЪ тренія, вЪ силу даннаго имЪ стремленія.

398. ПредставимЪ чрезЪ M массу движимаго, чрезЪ u скорость его по истеченіи нѣкотораго времени t; чрезЪ s такую поверхность, которая двигаясь прямо, должна ощутить сопротивленіе равное тому, какому дѣйствительно подвержено само тѣло вЪ густотѣ D жидкости. ВЪ сходственность здѣланнаго (382) наблюденія, получимЪ вЪ $nDsu^2dt$ такое количество движенія, какого тѣло должно лишаться вЪ каждое мгновеніе dt; и слѣд. (158) $\frac{nDsu^2dt}{M}$ будетЪ значить степень скорости, потерянную имЪ вЪ тоже мгновеніе, или разность между скоростями движущагося тѣла вЪ два послѣдовательныя мгновенія. И такЪ давши du (11) знакЪ —, потому что когда t увеличивается, тогда u уменьшается, будемЪ имѣть $\frac{nDsu^2dt}{M} = -du$.

Для интеграціи сего количества должно раздѣлить его на u^2; отъ чего произойдетъ $\frac{nDsdt}{M} = \frac{-du}{u^2}$, котораго интеграломъ (60) будетъ $\frac{nDt}{M} = C + \frac{1}{u}$.

Постоянное C должно опредѣлиться по слѣдующему условію, именно, чтобъ по означеніи чрезъ V начальной скорости движимаго, величина $u = V$, когда t предположено будетъ $= o$. Слѣд. получимъ $o = C + \frac{1}{V}$; отсюда выходитъ $C = -\frac{1}{V}$. Слѣд. $\frac{1}{u} - \frac{1}{V} = \frac{nDst}{M}$ будетъ такое уравненіе, по которому не трудно опредѣлить величину u по прошествіи какого нибудь времени t.

А чтобъ показать это на примѣрѣ, въ которомъ бы можно было употребить всѣ количества, заключающіяся въ найденномъ уравненіи, положимъ, что кубъ слоновой кости, коего бокъ величиною въ одинъ дюймъ, движется въ водѣ по горизонтальной плоскости AB (*фиг.* 16) перпендикулярно къ сторонѣ своей CD; потомъ принявъ за начальную его скорость 50 футовъ въ секунду времени, будемъ искать, какой величины должна быть эта скорость въ половинѣ секунды.

ВЪ сходственность такого допущенія будемЪ имѣть $t = \frac{1}{2}''$, $V = 50$ Ф., $s = 1$ квадратному дюйму, или $= \frac{1}{144}$ квадратнаго фута; $n = \frac{1}{2}$ (382). ЧтожЪ касается до M, то величина его должна равняться величинѣ кубическаго дюйма, умноженной на плотность слоновой кости; и слѣд. по представленіи этой плотности чрезЪ D′, получимЪ $M = \ldots \frac{1}{1728} D'$.

И такЪ будемЪ имѣть $\frac{1}{u} - \frac{1}{50} = \frac{\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{1728} D'}$ $= \frac{3D}{D'}$. А какЪ по приложенной таблицѣ вЪ концѣ IV *части сего Курса*, $D' : D = 1,825 : 1$; или $\frac{D}{D'} = \frac{1}{1,825} = 0,548$; то $\frac{1}{u} - \frac{1}{50} = 1,644$, или $\frac{1}{u} = 1,664$; слѣд. $u = \frac{1}{1,664} = 0,601$; отсюда заключимЪ, что вЪ концѣ полусекунды времени скорость куба будетЪ равна около $\frac{3}{5}$ частей фута на секунду.

399. Опредѣлимb теперь пространство, описанное вb то же время t.

Естьли представимb это пространство чрезb x, то получимb (179) $dx = udt$; вставивb вмѣсто u найденную величину его, будемb имѣть $dx = \frac{MVdt}{nDVst + M}$ такое уравненіе, котораго интегралb (100) состоитb изb $x = C' + \frac{M}{nDs}$ *лог.*$(nDVst + M)$.

Для опредѣленія постояннаго C' должно замѣтить, что по допущеніи $t = o$, x будетъ также $= o$; слѣд. $o = C' + \frac{M}{nDs} \ldots$ лог. M; и слѣд. $x = \frac{M}{nDs}$ лог. $\left(\frac{nDVst + 1}{M}\right)$.

Примѣняя это разсужденіе къ предыдущему примѣру, получимъ $x = \frac{\frac{1}{1728} \times D'}{\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{144}}$ лог. . . . . $\left(\frac{\frac{1}{2} \times D \times 50 \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{1728} \times D'} + 1\right)$, или $x = \frac{1}{6} \frac{D'}{D}$ лог. $\left(150 \frac{D}{D'} + 1\right)$; а поелику $\frac{D}{D'} = 0,548$, или $\frac{D'}{D} = 1,825$, то будемъ имѣть $x = 0,304$ лог. $82,20$.

А какъ этотъ логариѳмъ (88) есть гиперболической, то пріискавши въ таблицахъ обыкновенной логариѳмъ числа 82,20, и именно 1,9148718, умножаю его на 2,3025851 и нахожу 4,4091550; слѣд. $x = 0,304 \times 4,4091$ и проч, или наконецъ $x = 1^{ф.}, 341 = 1^{ф.}\ 4^{д.}$ Отсюда заключаемъ, что кубъ описавъ пространство равное въ 16 разъ взятому длиннику своему, потеряетъ больше $\frac{49}{50}$ своей скорости.

400. Здѣлаемъ переходъ къ прямолинейному движенію тяжелыхъ тѣлъ въ противящихся срединахъ. Допустимъ тѣло опускающимся на низъ. Движеніе его притупляется по двумъ причинамъ: вопервыхъ отъ сопротивленія стѣснаемыхъ частей жидкости; вовторыхъ отъ потерянія нѣкоторой части

вѣсу его въ жидкости, части равной (312) вѣсу изверженной величины жидкости.

Оставивъ тѣжъ наименованія предыдущимъ количествамъ, найдемъ, что притупленіе скорости по первой причинѣ въ движеніи изобразится (382) чрезъ $nDsu^2dt$.

Чтожъ принадлежитъ до потери движенія по второй причинѣ, то должно опредѣлить вѣсъ величины жидкости, занимаемой движущимся тѣломъ. Но извѣстно, что при равной величинѣ массы (160) содержатся пропорціонально плотностямъ; и такъ представивъ чрезъ D' плотность движимаго, получимъ $D' : D = M$ къ массѣ изверженной жидкости, и слѣд. она будетъ равняться $\frac{MD}{D'}$. Означивъ чрезъ p скорость, которую свободное тѣло получаетъ въ секунду времени по силѣ тяжести своей, будемъ имѣть pdt скорость его по силѣ тяжести въ мгновеніе dt; слѣд. $\frac{MD}{D'}pdt$ представитъ вѣсъ величины изверженной жидкости, или потерянное количество движенія тѣломъ по второй причинѣ. Слѣд. цѣлая потеря движенія его на каждое мгновеніе будетъ $\frac{MD}{D'}pdt + nDsu^2dt$. А по-

елику тяжесть присовокупляетЪ ему вЪ каждое мгновенiе количество движенiя $Mpdt$, то оно дѣйствительно должно двигаться сЪ количествомЪ $= Mpdt - \frac{MD}{D'} pdt - nDsu^2dt$, и слѣд. прибавленiе скорости на каждое мгновенiе будетЪ состоять только изЪ . . . . :
$\frac{Mpdt - \frac{MD}{D'} pdt - nDsu^2dt}{M}$, или изЪ $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)$
$pdt - \frac{nDsu^2}{M} dt$. Отсюда выходитЪ $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)$
$pdt - \frac{nDsu^2}{M} dt = du$.

ЗдѣлавЪ для легкости $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p = g$,
и $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$, получимЪ $gdt - \frac{gu^2}{k^2} dt = du$,
или $gdt = \frac{k^2du}{k^2 - u^2}$.

Для интеграцiи сего количества перемѣняю его (108 и 111.) вЪ $gdt = \frac{\frac{1}{2}kdu}{k - u} + \frac{\frac{1}{2}kdu}{k + u}$, и нахожу (100) $gt = C - \frac{1}{2}k$

$лог.\,(k - u) + \frac{1}{2}k\ лог.\,(k + u)$ интеграломъ его.

Допустимъ, что движимое при началѣ движенія своего не получило никакого побужденія. Въ такомъ случаѣ постоянное C должно опредѣлиться по условію, чтобъ по предположеніи $t = o$, u было бы также $= o$. Слѣд. $o = C - \frac{1}{2}k\ лог.\,k + \frac{1}{2}k\ лог.\,k$, то есть, $C = o$. И такъ уравненіе $gt = \frac{1}{2}k\ лог.\,\frac{k + u}{k - u}$ представляетъ скорость движимаго въ концѣ какого нибудь времени t.

401. А чтобъ опредѣлить пространство, описанное въ это же время t, то возьмемъ уравненіе $dx = udt$ (179), гдѣ x будетъ означать оное пространство.

И такъ должно изъ предыдущаго уравненія вывести величину u, и вставить ее въ послѣднемъ.

Но изъ уравненія $gt = \frac{1}{2}k\ лог.\,\frac{k + u}{k - u}$ выходитъ $лог.\,\frac{k + u}{k - u} = \frac{2gt}{k}$, или $лог.\,\ldots\ \frac{k + u}{k - u} = \frac{2gt}{k}\ лог.\,e$, ($e$ представляетъ такое число, котораго логариѳмъ равенъ 1) или

наконецъ $\text{лог.}\ \frac{k+u}{k-u} = \text{лог.}\ e^{\frac{2gt}{k}}$; слѣд.

$\frac{k+u}{k-u} = e^{\frac{2gt}{k}}$, и слѣд. $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$;

отсюда выходитъ $dx = \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} kdt$ такое уравненіе, которое сначала перемѣняю въ $dx = \frac{kdte^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} - \frac{kdt}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, по томъ въ слѣдующее другое $dx = \frac{kdte^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} \ldots$

$$- \frac{kdte^{-\frac{2gt}{k}}}{1 + e^{-\frac{2gt}{k}}}.$$

Но по изъясненному (28 и 100) не трудно примѣтить, что оба члена второй части представляютъ логариѳмическіе диференціалы; и слѣд. получимъ интеграломъ $x = C' + \frac{kk}{2g}\ \text{лог.}\ \left(e^{\frac{2gt}{k}} + 1\right) + \frac{kk}{2g}$

$лог. \left(e^{-\frac{2gt}{k}} + 1\right)$, или $x = C' + \frac{kk}{2g}$

$лог. \left(e^{\frac{2gt}{k}} + 1\right) + \frac{kk}{2g}\, лог. \left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{e^{\frac{2gt}{k}}}\right)$;

или $x = C' + \frac{kk}{2g}\, лог. \frac{\left(e^{\frac{2gt}{k}} + 1\right)^2}{e^{\frac{2gt}{k}}}$, или

наконецъ $x = C' + \frac{kk}{g} лог. \left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{e^{\frac{gt}{k}}}\right)$.

Опредѣляя постоянное C', замѣтимъ, что по допущеніи $t = o$, количество x должно быть также $= o$; ибо мы предполагаемъ, что тѣло при началѣ своего движенія не получило никакого побужденія. Въ сходственность чего будемъ имѣть $o = C' + \frac{kk}{g}$ лог. $\frac{1+1}{1} = C' + \frac{kk}{g}$ лог. 2; слѣд. $C' = -\frac{kk}{g}$ лог. 2, наконецъ $x = \frac{kk}{g}$. лог. $\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{2e^{\frac{gt}{k}}}\right)$.

Вотъ уравненіе, которое опредѣляетъ пространство x, описанное по истеченіи какого нибудь времени t.

402. Приступимъ къ движенію восходящихъ тѣлъ.

Тяжесть и сопротивленіе середины служатъ къ уменьшенію скорости движущагося тѣла на верхъ; но тяжесть въ этомъ послѣднемъ случаѣ, равно какъ и въ предыдущемъ, уменьшается сама, потому что вѣсъ движимаго уменьшается вѣсомъ величины изверженной жидкости. И такъ сила приступляющая движеніе будетъ $Mpdt - \frac{MD}{D'} \ldots pdt + nDsu^2dt$; и слѣд. происходящая отъ того потеря скорости изобразится чрезъ $pdt - \frac{D}{D'}pdt + \frac{nDsu^2dt}{M}$. Отсюда выходитъ

$$\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt + \frac{nDsu^2dt}{M} = -du.$$

Здѣлавъ, какъ прежде, $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)p = g$, и $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$, получимъ $gdt + \frac{g}{k^2}u^2dt = -du$; и слѣд. $gdt = \frac{-k^2du}{k^2 + u^2}$.

Естьли здѣлаемъ $u = kz$, то будемъ имѣть $gdt = \frac{-kdz}{1 + zz}$, или $= \frac{-gdt}{k} = \frac{dz}{1+zz}$.

Но вторая часть сего уравненія (86) изображаетъ элементъ круговой дуги, которой тангенсомъ служитъ z, а радіусомъ 1.

И такъ z есть тангенсъ дуги, служащей интеграломъ второй части или величинѣ ея, изображенной интеграломъ первой части. Слѣд. $z = -$ *танг.* $\left(\frac{gt}{k} + C\right) = \frac{u}{k}$;

и слѣд. $u = - k$ *танг.* $\left(\frac{gt}{k} + C\right)$.

Для опредѣленія постояннаго количества C, должно замѣтить, что по допущеніи $t = o$, u должно быть равно скорости, съ которою тѣло сначала двинулось. Представивъ эту скорость чрезъ V, получимъ $V = - k$ *танг.* C; и слѣд. *танг.* $C = - \frac{V}{k}$,

или C = *дугѣ танг.* $\frac{-V}{k}$; то есть, дугѣ

имѣющей тангенсомъ $\frac{-V}{k}$. Почему представивъ чрезъ A дугу имѣющую тангенсомъ

$\frac{V}{k}$, получимъ $C = - A$. Слѣд. $u = k$

танг. $\left(A - \frac{gt}{k}\right)$.

403. А чтобъ опредѣлить описанное пространство, то возьмемъ уравненіе $dx = udt$; и мы получимъ $dx = kdt$ *танг.* $\left(A - \frac{gt}{k}\right) = \frac{kdt \text{ син.} \left(A - \frac{gt}{k}\right)}{\text{кос.} \left(A - \frac{gt}{k}\right)}$, (Геом. 22 и 27).

Но это количество представляетъ логариѳмической дифференціалъ; слѣд. (100) будемъ имѣть $x = C' + \frac{k^2}{g}$ *лог. кос.* $\left(A - \frac{gt}{k}\right)$.

Что принадлежитъ до постояннаго C', то оно должно быть таково, что по допущеніи $t = o$, x должно быть также $= o$; слѣд. $o = C' + \frac{k^2}{g}$ *лог. кос.* А, а $C' = \frac{-k^2}{g}$. *лог. кос.* А; и слѣд. наконецъ $x = \frac{k^2}{g}$. . *лог.* $\frac{\text{кос.} \left(A - \frac{gt}{k}\right)}{\text{кос. } A}$ представитъ такое уравненіе, по которому не трудно опредѣлить описанное пространство по прошествіи какого нибудь времени t.

404. А чтобъ узнать всю высоту, на какую подымется тѣло въ силу данной ему скорости V, то должно въ уравненіи $u = k$ *танг.*

$\left(A - \frac{gt}{k}\right)$ предположить $u = o$; и слѣд. $A - \frac{gt}{k} = o$; послѣ чего выходитъ $x = \frac{k^2}{g}$ лог. $\frac{\text{кос. } 0^r}{\text{кос. A}} = \frac{k^2}{g}$ лог. $\frac{1}{\text{кос. A}}$.

405. Вотъ и нѣкоторые примѣры на эту теорїю. Возьмемъ одинъ изъ опытовъ Гна. Невтона, которой былъ здѣланъ въ Іюнѣ мѣсяцѣ 1710 года. Невтонъ открылъ, что стеклянный шаръ, наполненный воздухомъ 4 д., 6932 въ дїаметрѣ, и вѣсомъ 1,0219 унцїй въ воздухѣ (мѣра и вѣсъ эти приведены здѣсь въ такїя, какїя употребляются въ Парижѣ.), пущенный съ высоты равной $206\frac{1}{2}$ футамъ, упалъ въ $8''\frac{1}{5}$ времени. Посмотримъ теперь, въ самомъ ли дѣлѣ тяжелое тѣло въ $8''\frac{1}{5}$ должно упасть, при допущенїи воздушнаго сопротивленїя, съ высоты 206, 5 ф.

Опредѣлимъ сначала количества g и k. Мы здѣлали $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) p$, гдѣ $p = 30{,}2$.

Для опредѣленїя содержанїя $\frac{D}{D'}$ густоты воздуха къ плотности стекляннаго шара, должно вычислить вѣсъ величины воздуха, равной сему шару, и прибавить его къ вѣсу, найденному въ томъ же шарѣ вывѣшенномъ въ воздухѣ, чрезъ то получимъ настоящїй вѣсъ его; потомъ сравнивъ этотъ вѣсъ съ вѣсомъ такой же величины воздуха, получимъ содержанїе плотностей; ибо при равныхъ величинахъ плотности содержатся пропорцїонально вѣсамъ (160).

Но шаръ, имѣющїй 4д, 6932 или оф, 3911 въ дїаметрѣ, долженъ быть величиною въ 0,03134 куби-

ческаго фута; а поелику тяжесть воздуха состоитъ изъ 850 — той части тяжести воды, которой одинъ кубической футъ вѣситъ 70 фунтовъ или 1120 унцїй; слѣд. кубической футъ воздуха будетъ вѣсить $\frac{1120}{850}$, или $\frac{112}{85}$ унцїй; и такъ величина воздуха, равная этому шару, вѣситъ 0,0413 унцїй. А какъ шаръ, употребленный для опыту, долженъ былъ потерять въ воздухѣ часть своего вѣса, равную вѣсу изверженной имъ величины воздуха; то слѣдуетъ заключить, что вѣсъ его въ пустотѣ долженъ бы состоять изъ 1 унц., 0632. А поелику равная величина воздуха вѣситъ 0,0413, то получимъ $D' : D = 1{,}0632 : 0{,}0413 = 10632 : 413$; слѣд. $\frac{D}{D'} = \frac{413}{10632} = 0{,}0388$. Слѣд. $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) p = (1 - 0{,}0388) \times 30{,}2 = \ldots$ $0{,}9612 \times 30{,}2 = 29{,}03$.

Что принадлежитъ до k, то $k^2 = \frac{gM}{nDs}$, потому что $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$.

Но M равняется величинѣ шара, умноженной на плотность его D'; а какъ эту величину нашли мы $= 0{,}03134$, то получимъ $M = 0{,}03134D'$; слѣд. $k^2 = \frac{g \times 0{,}03134\, D'}{nsD}$. А поелику (382) $n = \frac{1}{2}$, и (396) s состоитъ изъ половины площади большаго круга шара; площадь же эта $= 0{,}12028$; слѣд. $s = 0{,}06014$; слѣд. $k^2 = \frac{0{,}03134}{\frac{1}{2} \times 0{,}06014} \times g \times \frac{D'}{D} = \ldots$ $\frac{0{,}03134}{0{,}03007} \times 29{,}03 \times \frac{1}{0{,}0388} = 779{,}53$; слѣд. $k = 27{,}92$.

И такъ получимъ $g = 29{,}03$, $k = 27{,}92$, и $t = 8''\frac{1}{5}$.

Теперь стоитъ только вставить эти величины въ выведенной величинѣ x, то есть, въ $x = \frac{kk}{g}$ . . лог. $\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{2e^{\frac{gt}{k}}}\right)$. Но прежде вставки здѣлаемъ послѣднюю сїю формулу нѣсколько проще для выкладки. Приравнявъ $e^{\frac{gt}{k}} = N$, получимъ $e^{\frac{2gt}{k}} = N^2$, и слѣд. $x = \frac{kk}{g}$ лог. $\frac{N^2 + 1}{2N}$.

Что касается до опредѣленїя величины N, то изъ уравненїя $e^{\frac{gt}{k}} = N$, выходитъ $\frac{gt}{k}$ лог. $e =$ лог. N, или $\frac{gt}{k} =$ лог. N; но по логариѳму N не трудно опредѣлить самое количество N.

По допущенїи сего получимъ $N = \frac{29{,}03 \times 8\frac{1}{5}}{27{,}92} = 8{,}52599$. А какъ этотъ логариѳмъ есть гиперболической, то для полученїя числа отвѣчающаго ему, должно привести его въ обыкновенной логариѳмъ (88), умноживъ на 0,4342945; отъ чего прои͏зойдетъ 3,7027895; этотъ логариѳмъ отвѣчаетъ въ таблицахъ 5044; слѣд. N = близу 5044.

Поелику N выходитъ довольно великое число, то не трудно примѣтить, что въ количествѣ $\frac{N^2 + 1}{2N}$ можно, не опасаясь здѣлать въ результатѣ чувствительной ошибки, опустить членъ 1 въ разсужденїи N^2, и слѣд. превратить величину x въ $x = \frac{kk}{g}$ лог. $\frac{N^2}{2N} = \frac{kk}{g}$ лог. $\frac{N}{2} = \frac{779{,}53}{29{,}03}$ лог. 2522.

И такъ беру (83) гиперболической логариѳмъ числа 2522, которой будетъ 7,8328075, и умноживъ его на $\frac{779,53}{29,03}$, нахожу $x = 210$ ф,2; это число разнится отъ опыту не болѣе какъ на 3 ф,7.

Въ этожъ время (174) движимое должно бы опуститься на 1015 футовъ въ пустотѣ.

406. Что касается до скорости, то она выраженїемъ своимъ, какъ мы то видѣли (400), имѣетъ $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, то есть, $u = \frac{kN^2 - k}{N^2 + 1}$. Вставивъ вмѣсто k и N величины ихъ, найденныя выше, получимъ $u = \frac{[(5044)^2 - 1] \times 27,92}{(5044)^2 + 1}$ близу $= 27,92$.

407. Выраженїе $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, въ которомъ $e^{\frac{2gt}{k}}$ возрастаетъ по мѣрѣ какъ t увеличивается; показываетъ, что скорость, по истеченїи извѣстнаго времени, перес[...]ъ увеличиваться чувствительно. Въ самомъ дѣлѣ представивъ это уравненїе такъ: $u = k\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}\right)$, примѣтимъ, что величина u будетъ непрестанно приближаться къ слѣдующей $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}}} = k$; отсюда надобно заключить, что тяжелыя тѣла, упадающїя въ противящей-

ся срединѣ, не увеличиваютъ безпрестанно, какъ въ пустотѣ, своей скорости; эта скорость никогда не можетъ здѣлаться больше k, и хотя по строгости тѣла достигаютъ этой скорости по безконечномъ времени; однако онѣ малымъ чѣмъ отъ нее разнятся и по истеченіи весьма короткаго. Очевиднымъ тому доказательствомъ служитъ данный (406) примѣръ, гдѣ движимое почти достигло этой скорости по прошествіи $8''\frac{1}{5}$.

408. Можно еще опредѣлить и другимъ образомъ самую большую скорость тѣлъ, опускающихся въ противящейся срединѣ. Естьли въ уравненіи . . . $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) pdt - \frac{nDsu^2}{M} dt = du$ предположимъ $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) pdt - \frac{nDsu^2}{M} dt = o$, то неминуемо получимъ $du = o$; то есть, что скорость перестанетъ увеличиваться. Но уравненіе $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) pdt - \frac{nDsu^2}{M} dt = o$ даетъ $Mpdt - \frac{MD}{D'} pdt = nDsu^2dt$, котораго первая часть изображаетъ настоящее сопротивленіе. Слѣд. движеніе приходитъ къ единообразности, когда сопротивленіе бываетъ равно вѣсу тѣла въ жидкости; но это само по себѣ ясно.

Изъ этаго жъ уравненія можно вывести, какъ прежде, $u^2 = \frac{\left(M - \frac{MD}{D'}\right) p}{nDs} = \frac{\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p}{\frac{nDs}{M}} =$

$\frac{g}{\frac{g}{k}} = k^2$, или $u = k$.

О скорости, получаемой тѣлами по дѣйствію какой нибудь сгущенной жидкости, какого рода на примѣръ воздухъ или порохъ.

409. Сила, которую сгущенный воздухъ или заключенный въ опредѣленномъ пространствѣ AB (*фиг. 17*), производитъ, разпространяясь на движимое, или бросаемое M, не имѣетъ конечной скорости въ одно мгновеніе. Опущеніе упругости совершается по степенямъ безконечно малымъ, которыхъ сумма въ продолженіе конечнаго времени опредѣляетъ конечную скорость брошеннаго вдаль тѣла.

410. Поелику эта сила дѣйствуетъ по степенямъ безконечно малымъ, то можно ее сравнить съ вѣсомъ тѣлъ, и слѣд. можно ее мѣрять вѣсомъ же. Вѣсъ, съ которымъ мы ее намѣрены сравнивать, есть вѣсъ атмосферы, то есть, такой колонны воздуха, которая имѣетъ основаніемъ большой кругъ ядра M, а высотою разстояніе атмосферы; этотъ вѣсъ намъ уже извѣстенъ (333).

И такъ представивъ чрезъ P массу одинаковаго вѣсу съ воздушною колонною; чрезъ p скорость, которую тяжесть сообщаетъ

свободному тѣлу въ одну секунду времени, получимъ въ $Ppdt$ вѣсъ сей колонны; потомъ изобразивъ чрезъ $1 : q$ содержаніе вѣса сего къ тому, которой долженъ измѣрять силу упругости воздуха, сгущеннаго въ пространствѣ AB, будемъ имѣть выраженіемъ этого послѣдняго вѣсу, или мѣрою силы упругости сгущеннаго воздуха количество $Ppqdt$.

Исключивъ тяжесть въ движимомъ M, то есть, допустивъ каналъ AD пушки горизонтальнымъ, и предположивъ, что движимое имѣетъ одинакой калибръ съ орудіемъ, такъ что будучи положено въ него, не оставляетъ между собою и стѣнами никакого промежутку, станемъ искать, съ какою скоростію должно оно вылетѣть изъ орудія въ свободное пространство.

Посмотримъ на него, когда оно придетъ до нѣкоторой точки C канала AD. Поелику сила упругости воздуха находится въ обратномъ содержаніи съ занимаемыми имъ пространствами (334), и потому сила воздуха, занимающаго пространство AC, будетъ содержаться къ той, какую онъ имѣлъ, занимая пространство AB, то есть, къ $Ppqdt =$ AB : AC; и такъ назвавъ F силу воздуха, разпространившагося по AC, получимъ F =

$\frac{AB}{AC} \times pqPdt = \frac{pqPadt}{x}$, по допущеніи $AB = a$, а $AC = x$.

Эту силу можно бы принять за такую, которою должна увеличиться скорость движенія тѣла въ точкѣ C, естьлибъ наружной воздухъ не дѣлалъ сопротивленія; но какъ сопротивленіе его въ противную сторону дѣйствуетъ силою $= pPdt$, то должно заключить, что сила дѣйствительно увеличивающая скорость движимаго, состоитъ только изъ $\frac{pqPadt}{x} - pPdt$; и слѣд. получаемое тѣломъ прибавленіе скорости въ какой нибудь точкѣ C будетъ

$$\frac{\frac{pqPadt}{x} - pPdt}{M}$$

, M означаетъ массу движимаго. И такъ представивъ чрезъ u дѣйствительную скорость движимаго, послѣ чего du будетъ означать приращеніе скорости, получимъ $\frac{\frac{pqPadt}{x} - pPdt}{M} = du$, или $\frac{pqPadt}{x} - pPdt = Mdu$.

А дабы по этому уравненію опредѣлить величину u, то должно вмѣсто dt поставить

величину его $\frac{dx}{u}$ (179); отъ чего произойдетъ $\frac{pqPadx}{ux} - \frac{pPdx}{u} = Mdu$, или $pq \frac{Padx}{x}$ . . $- pPdx = Mudu$, котораго интегралъ есть $pqPa$ лог. $x - pPx + C = \frac{Mu^2}{2}$.

Опредѣляя постоянное C, замѣтимъ, что поелику отпущеніе упругости воздуха начинаетъ дѣйствовать съ точки B, при которой $x = a$, и потому предыдущее уравненіе должно быть таково, что по допущеніи $x = a$, u должно быть также $= o$. И такъ получимъ $pqPa$ лог. $a - pPa + C = o$, и слѣд. $C = pPa - pqPa$ лог. a; слѣд. $\frac{Mu^2}{2} = pqPa$ лог. $\frac{x}{a} - pP(x - a)$. По этому уравненію опредѣляется скорость во всякой точкѣ C канальной длины орудія.

411. Возьмемъ для примѣра духовое ружье длиною въ стволѣ 3 ф$\frac{1}{2}$, заряженное свинцовою пулею, какихъ 16 на фунтъ; слѣд. такая пуля должна имѣть въ діаметрѣ о ф, 0524. Потомъ предположивъ, что сгущенный воздухъ занимаетъ пространство 6 дюймовъ, и что густота его къ густотѣ свободнаго воздуха содержится = 100 : 1, сыщемъ, какова будетъ скорость пули при вылетѣ изъ ружья.

Въ сходственность сего будемъ имѣть $a = b\,d = \frac{1}{2}$ф, $x = 3$ф$\frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{16}$, $q = 100$.

Опредѣляя P, припомнимъ себѣ (333), что вѣсъ атмосферы равняется вѣсу водянаго цилиндра въ 32 фута высотою. Поелику же большой кругъ пули имѣетъ въ діаметрѣ оф, 0524, то площадь его будетъ состоять изъ 0,00216 квадратныхъ футовъ; и слѣд. P будетъ $= 0{,}00216 \times 32 \times 70$ фунт., потому что удѣльная тяжесть воды состоитъ изъ 70 фунт.; итакъ P будетъ почти $4\frac{5}{6}$фунт. Притомъ же (172) $p = 30{,}2$. Вставивъ эти величины въ уравненіи выведенномъ для скорости, будемъ имѣть $\frac{1}{32} u^2 = 100 \times 30{,}2 \times 4\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$ лог. $\frac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 30{,}2 \times 4\frac{5}{6} \times 3 = 7298 \ldots$ лог. $7 - 437{,}9$. А какъ обыкновенной логариѳмъ 7 есть 0,8450980, то для приведенія его въ гиперболической, должно (88) умножить на 2,30258509; отъ чего произойдетъ по уничтоженіи прочихъ десятичныхъ цифръ не нужныхъ въ этой выкладкѣ 1,9459. Слѣд. $\frac{1}{32} u^2 = 7298 \times 1{,}9459 - 437{,}9 = 13762$, а $u = 664$ф; и слѣд. пуля должна вылетѣть съ скоростью по 664 фута на секунду.

Естьли захотимъ узнать по данному заряду такую длину орудія, которая бы могла произвести самое большое возможное дѣйствіе; то замѣтимъ, что по окончаніи дѣйствія заряда должно кончиться вмѣстѣ и прибавленіе скорости, то есть, du въ такомъ случаѣ становится $= o$. И потому взявши опять прежде выведенное уравненіе $\frac{pqPadt}{x} - pPdt = Mdu$, допустимъ $du = o$,

отъ чего оно превратится въ $\frac{qa}{x} - 1 = o$, или $x = qa$; то есть, длина орудія должна содержаться къ длинѣ заряда $= q : 1$, или какъ упругость сгущеннаго воздуха, составляющаго зарядъ, къ упругости натуральнаго.

412. Естьли потребуется опредѣлить, какъ великъ долженъ быть зарядъ, или какъ много долженъ быть сгущенъ воздухъ, чтобъ выстрѣленное тѣло получило данную скорость; то по уравненію $\frac{Mu^2}{2} = pqPa$ . . . $лог. \frac{x}{a} - pP(x - a)$ найдемъ $q =$ . . .

$$\frac{pP(x - a) + \frac{1}{2}Mu^2}{pPa\ лог.\ \frac{x}{a}}.$$

413. Естьли при одинакой упругости воздуха и одинакой длинѣ орудія прибавится удѣльная величина перваго, которая въ такомъ случаѣ бываетъ пропорціональна a; то есть, ежели увеличится зарядъ, то степени скорости, сообщаемыя движимому на равномъ разстояніи отъ казенника, здѣлаются больше, потому что сила упругости

бываетъ вообще пропорціональна $\frac{x}{a}$. А какъ зарядъ кладется по длинѣ орудія, то чѣмъ онъ будетъ больше, тѣмъ менѣе останется порожняго пространства для дѣйствія эластической жидкости. И такъ по длинѣ орудія долженъ быть такой зарядъ, которой здѣлаетъ самой большой выстрѣлъ.

И такъ чтобъ опредѣлить самую большую скорость выстрѣла, должно взять уравненіе $\frac{Mu^2}{2} = pqPa$ *лог.* $\frac{x}{a} - pP(x-a)$, и одифференціаливъ его, принимая одни u и a перемѣнными, приравнять потомъ къ нулю. Въ сходственность чего получимъ $o = pqPda$ *лог.* $\frac{x}{a} - pqPda + pPda$, или q *лог.* $\frac{x}{a} = q - 1$; отсюда выходитъ *лог.* $\frac{x}{a} = \frac{q-1}{q}$.

И такъ въ предыдущемъ примѣрѣ, гдѣ $q = 100$ и $x = 3ф,5$, получимъ *лог.* $\frac{3,5}{a} = \frac{99}{100} = 0,99$. А какъ это число изображаетъ гиперболической логариѳмъ $\frac{3,5}{a}$, то для опредѣленія числа $\frac{3,5}{a}$ посредствомъ таблицъ, должно умножить 0,99 на 0,4342945, отъ чего произойдетъ 0,4299515, отвѣчающее 2,7;

слѣд. $\frac{3,5}{a} = 2,7$, и $a = \frac{3,5}{2,7} = 1,3$; то есть, зарядъ, сообщающій самую большую скорость выстрѣлу, долженъ быть длиною 1 ф, 3 д, 7 л. Дѣлая же выкладку для скорости, найдемъ, что она при такомъ зарядѣ будетъ около 770 футовъ въ секунду.

414. Матерія, которая по запаленіи пороха распространяется въ огнестрѣльныхъ орудіяхъ, есть безъ сомнѣнія эластическая; но свойство ея не довольно еще намъ извѣстно, изъ воздуха ли она состоитъ, заключеннаго въ веществѣ пороха, или изъ воды кристализованной селитры, приведенной въ пары? Извѣстно только то, что воздухъ заключенный въ порошинкахъ, находится въ чрезвычайномъ состояніи сгустимости. Извѣстно также, что приведенная въ пары вода можетъ занимать пространства до 16000 больше того, которое она занимаетъ, будучи въ естественномъ своемъ состояніи. Можетъ быть обѣ эти причины содѣйствуютъ силѣ пороха. Какъ бы то ни было, но скорость, какую тѣла, извергаемыя силою пороха, получаютъ, показываетъ необманчиво дѣйствіе упругой жидкости; ежели эта упругость пропорціональна густотѣ жидкости, то производимое ею движеніе можно опредѣлить по изъясненнымъ выше правиламъ.

Однако замѣтимъ, что тутъ должно имѣть вниманіе на многія другія вещи, о которыхъ мы не упоминали; и именно 1е. на вѣсъ ядра, когда орудіе будетъ поставлено не горизонтально; 2е, на сопротивленіе воздуха во время какъ ядро пролетаетъ каналъ орудія; 3е. на зазоръ ядра и на заправку, которыя выпуская часть эластической жидкости, уменьшаютъ тѣмъ дѣйствіе ея; 4е. на послѣдовательное и не мгновенное запаленіе пороха, потому что нѣко-

торая часть его вылетаетъ не загорѣвшись, и слѣд. остается безъ дѣйствія. Изъ сихъ наблюденій первыя два не такъ важны и удобно подчиняются выкладкѣ, третіе не такъ удобно, однако нѣкоторымъ образомъ допускается; чтожъ принадлежитъ до четвертаго, то не льзя здѣлать ему вѣрнаго изчисленія, и потому мы не намѣрены входить въ дальнѣйшее изслѣдованіе сего послѣдняго пункта. Впрочемъ хотя не можно въ точности опредѣлить содержанія упругости сей эластической жидкости къ упругости натуральнаго воздуха; однако по довольно вѣроятнымъ гипотезамъ должно заключить, что оно чрезвычайно велико. Тѣ, которые опираются на сіи гипотезы, утверждаютъ, что сила пороха есть въ десять тысячь разъ больше упругости натуральнаго воздуха.

415. Въ предыдущемъ рѣшеніи предполагали мы орудіе AD неподвижнымъ, и слѣд. такимъ, которое отдавало назадъ нечувствительно. Когда же отбой его будетъ довольно великъ, то скорость должна перемѣниться. И такъ посудимъ о силѣ отбоя.

О силѣ отбоя въ духовыхъ или огнестрѣльныхъ орудіяхъ.

416. Сила, извергающая тѣло изъ орудія, будучи упругость эластической жидкости разпространившейся по каналу, должна производить дѣйствіе свое равно во всѣ стороны (295). Она извергая тѣло, должна

производить въ тожъ время дѣйствіе свое на внутреннія стѣны и на казенникъ орудія. Дѣйствіе ея на стѣны стремясь во всѣ стороны равно, будетъ натурально силиться разорвать орудіе; чтожъ принадлежитъ до дѣйствія ея на казенникъ, то оно будетъ стремиться уносить орудіе въ противную сторону съ направленіемъ вылетѣвшаго ядра. И такъ чтобъ опредѣлить скорость, съ которою орудіе должно двинуться назадъ, предложимъ себѣ слѣдующій вопросъ:

417. Положимъ, что двѣ извѣстныя массы M и *m* (*фиг. 18*) движутся въ противныя стороны по дѣйствію пружины *ab*, которая спускается по линеѣ соединяющей ихъ центры. Спрашивается, какъ велики будутъ скорости этихъ тѣлъ, когда онѣ будутъ удалены другъ отъ друга на данное какое нибудь разстояніе?

Положимъ, что, по прошествіи нѣкотораго времени t, оба тѣла будутъ находиться въ c и d (*фиг. 19*), такъ что когда M пробѣжитъ пространство $ac = z$, m опишетъ въ тоже время пространство $bd = y$. Скорость M при точкѣ c (179) будетъ $\frac{dz}{dt}$.

Слѣд. $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ изобразитъ приращеніе его скорости, а $Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$ количество движенія, пріобрѣтенное имъ въ мгновеніе dt. Представивъ чрезъ $F \times dt$, или Fdt силу пружины въ мгновеніе dt, получимъ $Fdt = Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$.

А какъ пружина должна спускаться равно съ обѣихъ сторонъ, то по той же причинѣ будемъ имѣть $Fdt = md\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

По этимъ двумъ уравненіямъ заключаемъ $Md\left(\frac{dz}{dt}\right) = md\left(\frac{dy}{dt}\right)$, и по интеграціи выводимъ $\frac{Mdz}{dt} = \frac{mdy}{dt}$ новое, къ которому не нужно прибавлять постоянное, потому что оно выполняетъ и безъ того требуемое вопросомъ условіе; ибо скорости M и m уничтожаются въ одно время. И такъ назвавъ u скорость M, а v скорость m, выводимъ $Mu = mv$.

Для опредѣленія обѣихъ сихъ скоростей надобно еще уравненіе. А чтобъ вывести

оное, то возьмемъ два предыдущія $Fdt = Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$ и $Fdt = md\left(\frac{dy}{dt}\right)$; умноживъ первое на $\frac{dz}{dt}$, а второе на $\frac{dy}{dt}$, и сложивъ два новыя вмѣстѣ, получимъ . .
$Fdz + Fdy = M\frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right) + m\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

Наконецъ представивъ чрезъ s разстояніе cd, а чрезъ a начальное разстояніе ab двухъ тѣлъ, получимъ $s = a + z + y$; слѣд. $ds = dz + dy$. Въ сходственность сего $Fds = M\frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right) + m\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, и слѣд. $\int Fds = \frac{1}{2}M\frac{dz^2}{dt^2} + \frac{1}{2}m\frac{dy^2}{dt^2}$, или $2\int Fds = Mu^2 + mv^2$.

418. Для примѣненія этого рѣшенія къ отбою орудій, должно предположить m массою ядра M (*фиг.* 17), а M массою пушки AD. Послѣ чего F становится силою пороха или эластической жидкости, которая загораясь, извергаетъ вонъ ядро; слѣд. (410)

будемъ имѣть $F = \frac{pqPa}{x} - pP = pP$ . . $\left(\frac{qa}{x} - 1\right)$, удержавъ количествамъ предыдущія названія. Но количество изображенное чрезъ x есть тоже, которое (*фиг.* 19) назвали мы s; количество a, означавшее (410) пространство заряда, изображаетъ (*фиг.* 19) тоже, что начальное разстояніе ab. И такъ въ сходственность сего получимъ $F = pP$ $\left(\frac{qa}{s} - 1\right)$, и слѣд. $Fds = pP$ . . . . $\left(\frac{qads}{s} - ds\right)$.

Послѣ чего уравненіе $2\int Fds = Mu^2 + mv^2$ превратится въ $2pP(qa \text{ лог. } s - s) + C = Mu^2 + mv^2$. Но по предположеніи $s = a$, то есть, что при началѣ движенія, должно быть $u = o$ и $v = o$, получимъ $C = -2pP$ $(qa \text{ лог. } a - a)$; слѣд. $Mu^2 + mv^2 = 2pP$ $\left(qa \text{ лог. } \frac{s}{a} + a - s\right)$.

И такъ представивъ наконецъ чрезъ l длину орудія, и предположивъ, что дѣйствіе кончится при вылетѣ ядра, получимъ $Mu^2 + mv^2 = 2pP\left(qa \text{ лог. } \frac{l}{a} + a - l\right)$,

которое вмѣстѣ съ уравненіемъ $Mu = mv$ опредѣлитъ скорость ядра и пушки.

Изъ этихъ двухъ уравненій выводимъ

$$u^2 = \frac{2mpP}{M(M+m)} \left(qa \text{ лог. } \frac{l}{a} + a - l\right)$$

$$\text{и } v^2 = \frac{2MpP}{m(M+m)} \left(qa \text{ лог. } \frac{l}{a} + a - l\right)$$

Естьли допустимъ M чрезвычайно большимъ тѣломъ относительно къ m, что и случается въ орудіяхъ большаго калибра, то будемъ имѣть,

$$u^2 = \frac{2mpP}{M^2} qa \left(\text{ лог. } \frac{l}{a} + a - l\right)$$

$$\text{и } v^2 = \frac{2pP}{m} \left(qa \text{ лог. } \frac{l}{a} + a - l\right)$$

Это послѣднее уравненіе одинаково съ найденнымъ (410), какъ тому и надобно быть; потому что когда тѣло M будетъ чрезвычайно велико въ разсужденіи m, тогда скорость отбоя должна неминуемо здѣлаться весьма мала.

И такъ должно заключить по этимъ уравненіямъ, что скорость бросаемыхъ тѣлъ

зависитъ также и отъ массы орудій, и особливо когда массу послѣднихъ можно сравнивать съ массою первыхъ, и когда орудія не будутъ ничѣмъ удерживаемы.

419. Для употребленія предыдущихъ правилъ предложимъ слѣдующій вопросъ: какова должна быть скорость отбоя въ пушкѣ 24, заряженной третьею частію вѣса ядра, предположивъ силу пороха не меньше тысячному вѣсу атмосферической колонны, отвѣчающей отверстію пушки.

Поелику діаметръ ядра пушки 24 состоитъ изъ 5 д, 444, то прибавивъ къ этому числу двѣ линеи или 0 д,166 на зазоръ, получимъ 5 д,61 за діаметръ канала.

А какъ кубической футъ пороха вѣситъ 64 фунт. то зарядъ, долженствующій состоять изъ 8 фунт. будетъ занимать пространство $\frac{1}{8}$ кубическаго фута, или $\frac{1728}{8}$ кубическаго дюйма; но основаніе цилиндра, занимаемаго этимъ зарядомъ, найдено 5 д,61 въ діаметрѣ, и потому длина цилиндра или заряда должна быть 8 д,73; слѣд. a = 8 д,73 = 0 ф,73. Но длина всего канала пушки 24 равна 9 ф, 6 д; слѣд. l = 9 ф,5. Пушка 24 вѣситъ одна 5400 фунт., но съ лафетомъ допустивъ весь вѣсъ до 6500 фунт., получимъ M = 6500, а m = 24. Слѣд. вся нужда теперь опредѣлить P.

Но P (333) должно равняться вѣсу такого цилиндра воды, которой имѣетъ высотою 32 фута, а діаметромъ основанія 5 д,61; этотъ цилиндръ будетъ около 385 фунтовъ, и слѣд. P = 385; наконецъ мы положили q = 1000.

И такъ получимъ

$$u^2 = \frac{48 \times 30{,}2 \times 385}{6500 \times 6524} \left(1000 \times 0{,}73 \; . \; . \; . \; . \; \text{лог.} \; \frac{9{,}5}{0{,}73} + 0{,}73 - 9{,}5\right)$$

$$= 0{,}013\,(730 \times 1{,}11440 \times 2{,}3025851 - 8{,}77)$$

$= 0{,}013 \times 1864 = 24, 3$; слѣд. u будетъ равно близу 5; отсюда заключаемъ, что скорость отбоя при вылетѣ ядра будетъ около 5 футовъ на секунду.

Что принадлежитъ до скорости ядра, то найдемъ $v^2 \; \frac{2 \times 6500 \times 30{,}2 \times 385}{24 \times 6524} \times 1864$; отсюда выходитъ $v = 1340$; то есть, скорость ядра при вылетѣ изъ пушки будетъ по 1340 футовъ на секунду.

И такъ, допустивъ, что порохъ производитъ дѣйствіе свое на подобіе эластической жидкости, которой сила уменьшается пропорціонально занимаемымъ ею пространствамъ, и что сила его упругости въ первое мгновеніе въ 1000 разъ больше вѣсу атмосферической колонны, отвѣчающей отверстію пушки, легко примѣтимъ, что при скорости 24 фунтоваго ядра по 1340 футовъ въ секунду, скорость отбоя будетъ только 5 футовъ въ секунду.

420. Вездѣ въ предыдущемъ мы дѣлали исключеніе сопротивленію воздуха; но это сопротивленіе имѣетъ великое вліяніе на отбой. Ибо когда ядро достигаетъ во внутренности пушки, примѣромъ до тысяче-футовой скорости въ секунду, тогда сопротивленіе, преодолѣваемое имъ въ мгновеніе dt, будетъ (382) $nDsu^2dt$. И такъ положивъ $n = \frac{1}{2}s'$, $s = \frac{1}{2}s'$, s' означаетъ здѣсь площадь большаго круга ядра, получимъ въ $\frac{1}{4}Ds'u^2dt$ искомое сопротивле-

нїе. Естьли представимЪ дїаметрЪ ядра чрезЪ a, а плотность его чрезЪ D', то вѣсЪ сего ядра изобразится чрезЪ $\frac{2}{3}s'aD'pdt$. Слѣд. сопротивленїе кЪ вѣсу ядра будетЪ содержаться $= \frac{1}{4} Ds'u^2dt : \frac{2}{3} s'aD'pdt = \frac{3D}{8D'} \times \frac{u^2}{pa} : 1$. Но плотность воздуха кЪ плотности чугуна содержится близу $= 1 : 6000$; и потому $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6000}$. А какЪ притомЪ $p = 30$ Ф, 2, $a = 5$ д, 444 = 0 Ф, 454, и наконецЪ $u = 1000$; то сопротивленїе будетЪ вЪ такомЪ случаѣ содержаться кЪ вѣсу ядра $= \frac{3}{8} \times \frac{1}{6000} \times \frac{1000^2}{30,2 \times 0,454} : 1 = \frac{3000}{48 \times 30,2 \times 0,454} : 1 = \frac{3000}{658} : 1 = 4,5 : 1$; то есть, сопротивленїе будетЪ почти вЪ четыре раза сЪ половиною больше вѣсу самаго ядра. И такЪ должно почитать, что эластическая жидкость пороха сопротивляется не постоянной массѣ равной ядру, но массѣ безпрестанно увеличивающейся. Противудѣйствїе на казенникЪ увеличивается также непрестанно. Хотя не трудно вывести дифференцїальныя уравненїя, опредѣляющїя движенїе пушки и ядра, имѣя вниманїе кЪ сей послѣдней причинѣ; но какЪ эти уравненїя не можно обынтегралить, то мы ихЪ оставляемЪ.

421. ВпрочемЪ настоящая выкладка, которою мы нашли скорость для ядра, основывается на предположенїи силы пороха вЪ 1000 разЪ больше вѣса атмосферической колонны, отвѣчающей отверстїю пушки; но естьли бы эластическая жидкость отЪ запаленїя разпространялась по найденному выше закону, то надобно бы заключить, что сила пороха должна быть еще больше. Когда будетЪ рѣчь итти о сопротивленїи воздуха при движенїи бросаемыхЪ тѣлЪ; то тамЪ увидимЪ, что случаются такїе выстрѣлы,

которые въ начальной своей скорости превышаютъ 1340 футовъ въ секунду.

422. Сраженїе воздуха съ эластической жидкостью пороха причиняетъ отбой въ орудїяхъ, и отъ этого-то дѣйствїя ракеты взлетаютъ на воздухъ. Эластическая жидкость, заключенная въ внутренности ракеты, разпространяется со скоростью, пропорцїонально разширительной силѣ и тому, какъ туго онѣ бываютъ набиты. Въ упорствѣ воздуха находится такое сопротивленїе, которое какъ бы мало ни было, отбиваетъ всегда назадъ. Законъ этаго сопротивленїя зависитъ отъ скорости перехода эластической жидкости, заключенной въ данномъ пространствѣ въ другую эластическую же жидкость по извѣстному отверстїю; но рѣшенїе такого запроса можетъ отдалить насъ отъ нашего предмета.

Отсюда должно заключить также, что не можно еще почитать за всю скорость отбоя ту, которая раждается во время переходу ядра по каналу пушки; она еще увеличивается отъ дѣйствїя эластической жидкости на воздухъ и по вылетѣ ядра; однакожъ границы этаго дѣйствїя весьма трудно опредѣлить.

О движенїи тяжелыхъ тѣлъ по наклоненнымъ плоскостямъ.

423. Тяжелое тѣло, положенное на плоскую поверхность KLHI (*фиг. 20*), склоненную къ горизонту PIHN, не можетъ повиноваться свободно своей тяжести. Одну часть бременительной силы оно употребляетъ

на гнетеніе плоскости, а другою движется вдоль по сей плоскости. И такъ тяжесть должна раздѣлиться на двѣ силы, изъ которыхъ одна производитъ давленіе на плоскость, а другая движеніе по оной.

Допустимъ, что G есть центръ тяжести сего тѣла, или такая точка, въ которой дѣйствіе бремененія (235) сосредоточивается; примемъ GB за то количество, на которое тѣло должно упасть, когда бы оно было свободнымъ. Проведемъ GC перпендикулярно къ плоскости KLHI, и вообразимъ по GB и GC плоскость; эта плоскость будетъ перпендикулярна къ двумъ другимъ KLHI, IPNH, потому что она проходитъ по прямымъ линеямъ, перпендикулярнымъ къ симъ послѣднимъ. И такъ по принятіи DE, EF сѣченіями этой плоскости продолженной съ двумя плоскостями KLHI, IPNH, онѣ будутъ перпендикулярны къ общему сѣченію HI тѣхъ же двухъ плоскостей.

Проведемъ GA параллельно съ DE, и здѣлаемъ параллелограмъ GABC, въ которомъ GB есть діагональ, а GA и GC бока. Можно (190) предположить, что тяжесть вмѣсто того, чтобъ побуждать тѣло двигаться по GB, она будетъ побуждать его двигать-

ся по GC со скоростью GC, и по GA со скоростью GA. Но явствуетъ, что сила GC будучи перпендикулярна къ плоскости, должна уничтожиться, когда точка O, гдѣ она встрѣчается съ плоскостью, будетъ точкою самаго тѣла.

Поелику сила GA будучи параллельна съ плоскостью, ни приближаетъ тѣло къ ней, ни удаляетъ его отъ нее; и потому она не можетъ не имѣть своего дѣйствія. Слѣд. GA представляетъ скорость, которую тѣло получаетъ въ первое мгновеніе.

Поелику сила GA находится въ плоскости двухъ прямыхъ линей GB и GC, и слѣд. въ плоскости DEF, то можно оставить на нѣкоторое время пространство двухъ плоскостей KLHI, IPHN и разсуждать объ одной только DEF, представленной (*фиг. 21*) DEF; такимъ образомъ можно почитать тѣло движущимся по прямой линеѣ DE, которую назовемъ *наклоненною плоскостью*; FE есть основаніе ея и представляетъ горизонтальную плоскость; перпендикуляръ DF, проведенный изъ какой нибудь точки D линеи DE на EF, будетъ служить *высотою* наклоненной плоскости.

424. А какЪ сила GA проходитЪ чрезЪ центрЪ тяжести G тѣла M, то она должна (269) раздѣлиться равно по всѣмЪ частямЪ его; и слѣд. пока треніе не будетЪ допущено, до тѣхЪ порЪ тѣло не можетЪ имѣть другаго движенія, кромѣ того, которымЪ будетЪ скользить вдоль плоскости; но никогда не можетЪ покатиться по оной, какой бы фигуры оно ни было, лишь бы перпендикулярЪ GC повстрѣчался сЪ плоскостью вЪ точкѣ прикосновенія кЪ ней поверхности самаго тѣла. Но естьли перпендикулярЪ кЪ плоскости не пройдетЪ по точкѣ или по точкамЪ, которыми тѣло опирается о поверхность, а оставитЪ ихЪ сЪ одной какой нибудь стороны, или естьли допустится треніе, то тѣло вЪ такомЪ случаѣ будетЪ двигаться другимЪ образомЪ, какЪ мы то увидимЪ ниже.

425. Поелику тѣло M должно описать GA вЪ тоже время, вЪ какое бы оно описало GB по свободному движенію своей тяжести; то вообразимЪ, что по прошествіи перваго мгновенія тяжесть начинаетЪ дѣйствовать снова; а какЪ она вЪ равныя мгновенія сообщаетЪ равныя степени скорости, то здѣлавЪ на вторую степень скорости, которую сообщитЪ тяжесть по вертикальной линеѣ, раз-

дѣленіе подобное предыдущему, найдемъ второй параллелограммъ совершенно равнымъ первому и въ одинакой съ нимъ плоскости. Слѣд. по той же причинѣ заключимъ, что перпендикулярная сила къ плоскости уничтожится, а сила параллельная и равная GA присовокупится; разсуждая такимъ же образомъ и о послѣдующихъ мгновеніяхъ, заключимъ вообще, что скорость по наклоненной плоскости увеличивается по равнымъ степенямъ, то есть, *движеніе тяжелыхъ тѣлъ вдоль по наклоненнымъ плоскостямъ ускоряется всегда одинаково.*

И такъ все сказанное нами (161 и слѣд.) о движеніяхъ равномѣрно ускоренныхъ, можно слово до слова примѣнить къ движенію вдоль по наклоненнымъ плоскостямъ; такъ что скорости сіи будутъ содержаться пропорціонально временамъ, пройденныя пространства пропорціонально квадратамъ времен, или квадратамъ скоростей и проч.

426. И потому для опредѣленія движенія на плоскости, находящейся въ извѣстномъ склоненіи, должно узнать содержаніе ускорительной силы къ тяжести, то есть, содержаніе GA къ GB. А поелику GA и GB параллельны съ DE и DF, и притомъ уголъ

AGB равенъ EDF и углы A и F прямые; то два треугольника AGB, EDF будутъ подобны, и слѣд. можно вывести такую пропорцію DE : DF = GB : GA. Отсюда заключаемъ, что *длина склоненной плоскости содержится къ высотѣ своей какъ скорость, какую бы тѣло должно получить отъ тяжести будучи свободнымъ, къ скорости, которую тяжесть сообщаетъ ему дѣйствительно вдоль по наклоненной плоскости.*

А какъ тяжесть сообщаетъ свободному тѣлу въ секунду времени 30,2 футовую скорость однобразно (172); то не трудно опредѣлить, какую скорость пріобрѣтетъ тѣло въ первую секунду своего паденія вдоль по наклоненной плоскости.

На примѣръ естьли длина плоскости будетъ вдвое больше высоты, то пріобрѣтенная скорость вдоль оной въ первую секунду, будетъ равна половинѣ 30,2 футовъ, то есть, тѣло будетъ пробѣгать въ каждую секунду по 15,1 футовъ, когда бы тяжесть, по истеченіи первой, перестала дѣйствовать.

427. Опредѣливъ скорость на первую секунду, можемъ послѣ найти ее и на всякое другое число секундъ; пространство же опредѣлится, когда умножишь первую ско-

рость на половину квадрата того же числа секундъ (174). Словомъ, не трудно опредѣлить всѣ обстоятельства сихъ движеній по изъясненному (172 и слѣд.) Изъ сихъ началъ выводимъ слѣдующія свойства.

428. Ежели два тяжелыя тѣла, пущенныя въ одно время изъ точки D (*фиг.* 22), будутъ двигаться, одно по плоскости DE, а другое по вертикальной линеѣ DF, и когда пожелаемъ узнать, на какомъ мѣстѣ плоскости DE первое тѣло будетъ находиться, когда второе достигнетъ до какой нибудь точки A; то должно въ такомъ случаѣ провести AB перпендикулярно къ DE; искомую точку покажетъ B.

Ибо представивъ чрезъ p скорость, какую тяжесть сообщаетъ свободному тѣлу въ секунду времени, и назвавъ (174) t время, которое нужно на паденіе вдоль DA, получимъ $DA = \frac{pt^2}{2}$. Съ другой стороны (426) скорость, пріобрѣтаемая въ секунду тѣломъ упадающимъ вдоль DE, состоитъ изъ $\frac{p \times DF}{DE}$, и слѣд. представивъ чрезъ T время, нужное ему на паденіе изъ D въ B, будемъ имѣть

(174) $DB = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; слѣд. $DA : DB = \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2} = DE \times t^2 : DF \times T^2$; но $DA : DB = DE : DF$; слѣд. $DE : DF = DE \times t^2 : DF \times T^2$, и слѣд. $T^2 = t^2$, или $T = t$.

429. И слѣд. естьли примемъ DG (*фиг. 23*) за третью плоскость, по которой упадаетъ новое тѣло, пущенное изъ D въ одно время съ предыдущими; то по проведенiи изъ точки A перпендикуляра AC, точки A, B, C будутъ тѣ, въ которыя придутъ означенныя тѣла въ одно время.

430. Естьли на DA, какъ на дiаметрѣ, начертимъ половину окружности; то она (*Геом.* 72) должна пройти чрезъ точки C и B, потому что углы C и B прямыя. Слѣд. хорды DC и DB описываются въ одно время съ вертикальнымъ дiаметромъ DA; а какъ это отнюдь не зависитъ отъ длины и склоненiя хордъ, то можно вообще утвердить, что *время паденiя по какой нибудь хордѣ круга, проведенной изъ конца вертикальнаго дiаметра, бываетъ одинаково съ временемъ паденiя по тому же вертикальному дiаметру.*

431. Мы видѣли (426), что p есть скорость, которую тяжесть сообщаетъ свободному тѣлу въ секунду времени, а $\frac{p \times DF}{DE}$ изображаетъ такую, которую она же производитъ въ то же время въ тѣлѣ, движущемся вдоль DE. И такъ представивъ чрезъ t и T времена нужныя на описаніе DF и DE, получимъ $DF = \frac{pt^2}{2}$, и $DE = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; слѣд. $DF : DE = \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; и слѣд. $\frac{(DF)^2}{DE} \times T^2 = DE \times t^2$, или $(DF)^2 \times T^2 = (DE)^2 \times t^2$, или $DF \times T = DE \times t$; слѣд. $t : T = DF : DE$. То есть, *времена, которыя нужно употреблять тѣлу, пробѣгающему по плоскостямъ одинакой высоты, для достиженія разныхъ точекъ E и F горизонтала FE, содержатся между собою какъ длины тѣхъ плоскостей.*

432. Скорость тѣла, упадающаго по DF, по прошествіи времени t есть pt. По той же причинѣ скорость тѣла, упадающаго по DE, есть $\frac{p \times DF}{DE} \times T$ по прошествіи вре-

мени T; и потому назвавъ u и v пріобрѣтенныя скорости тѣломъ достигшимъ до F и E, получимъ $u:v = pt : \frac{p \times DF}{DE} \times T$, и слѣд. $pvt = pu \times \frac{DF}{DE} T$. Но мы видѣли (431), что $t : T = DF : DE$; отсюда выходитъ $t = \frac{DF \times T}{DE}$; по вставкѣ сей величины t, и по приведеніи выходитъ $v = u$. И такъ *многія тѣла описывая плоскости разнымъ образомъ склоненныя, но одинакой высоты, будутъ имѣть одинакую скорость, пробѣжавъ каждое на своей плоскости части одинакой высоты.*

О движеніи по Поверхностямъ кривымъ.

433. Естьли тѣло, лишенное тяжести, и упругости начнетъ пробѣгать по силѣ даннаго ему въ началѣ побужденія смѣжные бока AB, BC и проч. (*фиг.* 24) какого нибудь многоугольника; то при встрѣчѣ каждаго бока оно должно потерять нѣкоторую часть своей скорости; эта часть опредѣляется такимъ образомъ.

Вообразимъ, что тѣло начинаетъ двигаться изъ A къ B, и что достигнувъ этой

точки B, получаетъ такую скорость, что здѣлавшись свободнымъ, оно въ состояніи описывать въ определенное время, на пр. въ секунду на продолженіи AB линею BF. Поставивъ изъ точки B на BC, перпендикуляръ BE, здѣлай прямоугольной параллелограмъ BDFE, которому бы BF служила діагональю, а BC и BE боками; и вмѣсто того, чтобъ принимать тѣло имѣющимъ скорость BF, вообрази себѣ, что оно получило вдругъ двѣ новыя BD и BE. А какъ бокъ BC препятствуетъ тѣлу повиноваться скорости BE, то безъ труда заключаемъ, что скорость его должна превратиться въ одну BD.

Ежели изъ точки B, какъ изъ центра, радіусомъ BF опишемъ дугу FI, то DI разность между BF и BD будетъ показывать потерянную скорость; но DI есть обращенный синусъ дуги FI или угла FBC, состоящаго изъ двухъ смѣжныхъ боковъ AB и BC. Слѣд. до тѣхъ поръ, пока два бока будутъ дѣлать опредѣленной уголъ, тѣло будетъ лишаться опредѣленной части своей скорости при встрѣчѣ съ каждымъ бокомъ.

434. Но ёжели уголъ, заключающійся между этими двумя боками, будетъ безконечно малъ, то потерянная тѣломъ скорость

не только не сдѣлается конечнымъ количествомъ, но и еще не будетъ количествомъ безконечно малымъ перваго порядка; она будетъ безконечно малымъ втораго порядка. А чтобъ въ этомъ увѣриться, то должно доказать, что обращенный синусъ безконечно малаго угла есть количество безконечно малое втораго порядка. Вотъ причина.

Принявъ CD (*фиг. 25*) за какую нибудь дугу, а BD перпендикуляромъ на діаметръ AC, получимъ (*Геом.* 121) AB : BD = BD : BC. Въ сходственность чего естьли допустимъ CD, и слѣд. BD безконечно малымъ количествомъ, BC (обращенный синусъ CD) долженъ изобразить безконечно малое втораго порядка, потому что BC содержится въ BD столько разъ, сколько BD содержится само въ безконечно большомъ противу его количествѣ AB. Слѣд. BC есть безконечно малое втораго порядка.

435. Заключимъ отсюда, что *тѣло безъ тяжести, движущееся по кривой поверхноности ABC* (фиг. 26), *будетъ имѣть повсюду одинакую скорость.*

Ибо естьли примемъ кривую поверхность многоугольникомъ, состоящимъ изъ безчи-

сленнаго множества боковЪ; то потерянная скорость при встрѢчѢ каждаго бока вЪ разсужденіи начальной скорости будетЪ безконечно малое количество втораго порядка, потому что оные бока дѢлаютЪ безконечно малые углы. И такЪ сумма потерянныхЪ скоростей по пробѢжаніи безконечнаго числа боковЪ, то есть, по пробѢжаніи какой нибудь дуги АВС не иное можетЪ здѢлать количество, какЪ безконечно малое втораго порядка. СлѢд. скорость не перемѢняется.

436. ПриступимЪ теперь кЪ движенію тяжелыхЪ тѢлЪ по кривымЪ поверхностямЪ. Мы будемЪ разсуждать обЪ одномЪ только движеніи, которое случается вЪ вертикальной плоскости.

ПоложимЪ, что АМВ (*фиг.* 27) представляетЪ сѢченіе кривой поверхности, и вмѢстѢ слѢдЪ здѢланной по ней тѢломЪ. ПримемЪ эту кривую линею многоугольникомЪ, изЪ безчисленнаго множества боковЪ состоящимЪ, и допустимЪ тѢло описавшимЪ маленькой бокЪ *n*М. Поелику встрѢча тѢла сЪ бокомЪ М*m* не можетЪ (434) ни мало перемѢнить его скорости, и потому оно должно бы, описать М*m* сЪ такою же скоростью, какую имѢло вЪ М, естьли бы тяжесть не имѢла

своего дѣйствія. Но эта сила дѣйствуя по вертикалу Mq, сообщаетъ тѣлу новое стремленіе по этому направленію. И такъ естьли раздѣлимъ скорость Mq, производимую тяжестью въ мгновеніе, на двѣ другія на Mr перпендикулярную къ Mm, и Mo имѣющую направленіе по Mm, то въ сходственность этой послѣдней скорость M должна увеличиться. Но по проведеніи вертикала mr и по сравненіи подобныхъ треугольниковъ Mqo, Mmr, выходитъ $Mm : mr = Mq : Mo$; слѣд. $Mo = \frac{Mq \times mr}{Mm}$.

Отнесемъ разныя точки кривой линеи AB къ вертикальной оси BZ, и представивъ BP чрезъ x, PM чрезъ y, а дугу BM чрезъ s, получимъ Pp или $mr = -dx$, $mM = -ds$. Мы приписываемъ (21) этимъ количествамъ знакъ $-$, потому что тогда, когда время t увеличивается, x и s уменьшаются.

Принявъ p за скорость, которую тяжесть сообщаетъ свободному тѣлу въ секунду времени, получимъ въ pdt (173) ту, какую она сообщитъ ему въ мгновеніе dt. Слѣд. будемъ имѣть скорость $Mq = pdt$. Естьли назовемъ u скорость, которую получаетъ тѣло пришедъ въ M, то приращеніе этой

скоростли въ мгновение dt будетъ означать du; послѣ чего $du = Mo$. Вставивъ эти величины въ уравнении $Mo = \frac{Mq \times mr}{Mm}$, будемъ имѣть $du = pdt \times \frac{-dx}{-ds} = \ldots$ $pdt \times \frac{dx}{ds}$. Но (179) $dt = \frac{-ds}{u}$; слѣд. по приведении выходитъ $udu = -pdx$ такое уравненie, котораго интеграломъ будетъ $\frac{uu}{2} = C - px$, или $uu = 2C - 2px$.

А чтобъ опредѣлить постоянное количество C, то положимъ, что точка A, откуда начало упадать тѣло, возвышается надъ горизонтомъ, проходящимъ чрезъ B, количествомъ $BZ = b$; и потому должно при допущенiи $u = o$, количеству x равняться b; слѣд. $o = 2C - 2pb$, а $C = pb$; слѣд $uu = 2pb - 2px = 2p(b - x) = 2p \times PZ$. А какъ квадратъ скорости тѣла, упадающаго свободно съ высоты PZ долженъ при P (176) равняться $2p \times PZ$; то заключимъ, что *тѣло, спускающееся по какой нибудь кривой линеѣ, будетъ имѣть во всякой точкѣ ея такую же скорость, какую бы оно прiобрѣло, упадая свободно съ равной до той точки высоты.*

И такъ скорость, которую пріобрѣтаетъ тѣло по силѣ тяжести своей, спускаясь по впадинѣ какой нибудь кривой линеи, ни мало не зависитъ отъ свойства этой кривой линеи.

437. И такъ естьли тѣло достигнувъ самой низкой точки B, которой тангенсомъ, положимъ, будетъ горизонтальная линея, встрѣтитъ потомъ впадину такой же кривой линеи или всякой другой, соединяющейся съ первою въ точкѣ B; то утверждаю, что тѣло должно подняться въ новой отрасли A′B на высоту равную той, съ которой оно спустилось.

Для доказательства положимъ, что тѣло M находится настояще въ B, гдѣ $x = o$; въ такомъ случаѣ скорость его будетъ $uu = 2pb$, или назвавъ эту скорость V для отличія отъ другой, будемъ имѣть $VV = 2pb$. Вообразимъ, что тѣло начинаетъ съ сею скоростью восходить по какой нибудь кривой линеѣ BM′; слѣд, въ сходственность предыдущаго разсужденія скорость его во всякой точкѣ M′ должна опредѣлиться по уравненію $-du' = pdt \times \frac{dx}{ds'}$, назвавъ u' скорость его, s' дугу BM′, и замѣтивъ, что u' бу-

детъ уменьшаться по мѣрѣ какъ t, s' и x увеличиваться. Вставивъ вмѣсто dt величину его $\frac{ds'}{u'}$, получимъ $u'du' = - pdx$, а по интеграціи $u'^2 = 2C - 2px$; но какъ скоро $x = o$, скорость u' становится равна V; слѣд. $V^2 = 2C$. А поелику $V^2 = 2pb$, то и $2C$ будетъ также $= 2pb$; слѣд. $u'^2 = 2pb - 2px$. Когда же тѣло перестанетъ подыматься, тогда u' здѣлается $= o$, и слѣд. $2pb - 2px = o$; отсюда выходитъ $x = b$. Слѣд. точка, до которой подымется тѣло во всякой кривой линеѣ BA', будетъ одинакой высоты съ точкою A.

438. Что принадлежитъ до опредѣленія времени, въ которое должно описать тѣло всякую дугу AM или AB кривой линеи; то должно по уравненію данной кривой линеи найти величину ds въ x и dx, и вставить ее въ величинѣ $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2pb - 2px)}}$ выведенной по уравненію $dt = \frac{-ds}{u}$, потомъ обынтегралить новое уравненіе.

439. Поелику тѣло, спускаясь по дугѣ какой нибудь кривой линеи, получаетъ во всякой точкѣ ея такуюже скорость, какъ бы оно упало вертикально

съ равной высоты той точки (436); и потому должно заключить, что тѣло спускающееся по дугѣ AD (*фиг.* 28), прїобрѣтетъ въ точкѣ D такую же скорость, какую бы оно получило, упавъ вдоль FD; въ такомъ случаѣ AF представляетъ горизонтальную, а CD вертикальную линею. По той же причинѣ тѣло упадая по дугѣ BD, получитъ въ точкѣ D скорость равную той, какую бы оно получило, упавъ по ED. Но тѣло упадая поперемѣнно изъ F и E, должно получить, достигнувъ D, такїя скорости, которыя (172) будутъ содержаться между собою, какъ квадратные корни изъ тѣхъ высотъ. И такъ представивъ чрезъ u и u' сїи скорости, будемъ имѣть $u : u' = \sqrt{(FD)} : \sqrt{(ED)}$.

Но естьли допустимъ ABD круговою дугою, гдѣ AD и BD будутъ служить хордами двухъ дугъ ABD и BD, то (*Геом.* 173.) $(AD)^2 : (BD)^2 = FD : ED$, и слѣд. $AD : BD = \sqrt{(FD)} : \sqrt{(ED)}$; слѣд. $u : u' = AD : BD$; то есть, прїобрѣтенныя скорости тѣломъ, упадающимъ по круговымъ дугамъ ABD и BD содержатся между собою какъ хорды AD и BD тѣхъ же дугъ.

440. Естьли эти дуги будутъ весьма малы, то скорости будутъ содержаться почти также, какъ самыя дуги, то есть, пропорцїонально пространствамъ, которыя пробѣгаетъ тѣло до самой нижней точки.

441. И такъ желая дать движимому двойную или тройную и проч. скорость противу той, какую оно прїобрѣтаетъ въ точкѣ D, спустившись по дугѣ BD, должно пустить его по дугѣ ABD, которой бы хорда была вдвое, втрое и пр. больше хорды BD.

442. Естьли надобно дать движимому извѣстную скорость, на примѣръ 4 - футовую въ секунду времени, то стоитъ только по объявленному (176) найти, съ какой высоты должно упасть тѣло для пріобрѣтенія означенной скорости; потомъ возьми на вертикалѣ DC линею DF равную этой высотѣ, привязавъ у точки C на продолженіи DF нитку длиною въ DC, повѣсь на ней тѣло; наконецъ удали это тѣло до точки A, гдѣ перпендикуляръ FA пересѣкаетъ дугу DA. Тогда это движимое пущенное изъ точки A, пріобрѣтетъ въ D 4 - футовую скорость, то есть, искомую въ секунду времени.

На этихъ свойствахъ и на равенствѣ продолженія паденій, доказанномъ нами посредствомъ малыхъ дугъ, основывается строеніе машины, на которой показываются опыты сраженія тѣлъ. См. *Физическія наставленія АббатаНоллета, Физику Гравезандову*, и пр.

О Качательномъ движеніи (mouvement d'oscillation).

443. Видѣли мы (437), что тяжелое тѣло спустившись по какой нибудь дугѣ кривой линеи AB (*фиг. 27*), должно (естьли не будетъ сопротивленія отъ воздуха и тренія) подняться на равную высоту въ отрасли BA' той же или всякой другой кривой линеи, которая при точкѣ B будетъ имѣть одинъ горизонтальной тангенсъ съ BA. И такъ это тѣло возвращаясь назадъ, должно пробѣжать опять все пространство A'BA и

дѣлать безпрестанно переходы взадѣ и впередѣ. Такое движенiе называется *качательнымѣ движенiемѣ*, или движенiемѣ маятника. А какѣ извѣстно (438), что нужно здѣлать для опредѣленiя времени каждаго размаха, которое безѣ сомнѣнiя будетѣ вдвое больше времени паденiя по дугѣ AB, ежели допустимѣ BA′ одинакой величины сѣ BA.

Когда кривая линея, по которой спускается тѣло, будетѣ кругѣ, и когда размахи будутѣ описывать малыя дуги; то качанiя такого роду бываютѣ весьма замѣчательны потому что продолженiе ихѣ отнюдь не зависитѣ отѣ длины дуги AB (*фиг. 29*); ибо принявѣ вѣ разсужденiе малую дугу AB (не болѣе 4 или 5 градусовѣ), найдемѣ, что тѣло достигнетѣ B вѣ одинакое время, будетѣ ли упадать изѣ точки A, или изѣ всякой другой O, лежащей между A и B. Вотѣ какѣ доказывается это свойство.

Удержавѣ предыдущiя названiя вещамѣ, и представивѣ чрезѣ a радiусѣ BC круга BAD, получимѣ по свойству этой кривой линеи $y = \sqrt{(2ax - xx)}$. Отсюда заключимѣ, что дуга Mm, или ds, или $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$

$\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. А какъ дуга BM принимается не большою, и слѣд. x должно быть также мало въ разсужденіи a, то для изображенія сего условія должно уничтожить xx въ разсужденіи $2ax$; но это дѣлаетъ $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax)}}$. Вставивъ эту величину ds въ величинѣ dt (438), будемъ имѣть $dt = \frac{-adx}{\sqrt{(2ax)}\times\sqrt{(2pb-2px)}}$, которую можно превратить въ $dt = \ldots$ $\frac{-\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ap)}\times\sqrt{(bx-xx)}}$, или въ $dt = \ldots$ $\sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-{}^{1}dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$.

Но естьли (93) $\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ изображаетъ элементъ дуги круга, которому діаметромъ служитъ $2a$; то по той же причинѣ $\frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx-xx)}}$ будетъ изображать элементъ дуги круга, имѣющаго діаметромъ b, а абциссою x. А поелику на BZ какъ на діаметрѣ опишемъ полкруга BM′Z, то по предположеніи $BZ = b$, получимъ въ Mm' озна-

ченный элементЪ, такЪ что $\frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx - xx)}} =$ $M'm' = d(BM')$, и слѣд. $\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{bx - xx}} =$ $\frac{d(BM')}{b}$. Естьли вставимЪ эту величину вЪ уравненіи dt, то выдетЪ $dt = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-d(BM')}{b}$, а по интеграціи $t = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$. Теперь стоитЪ только опредѣлить постоянное C. Но не трудно примѣтить, что по допущеніи $t = o$, то есть, когда тѣло будетЪ упадать изЪ точки A, дуга BM' здѣлается равна половинѣ окружности BM'Z; слѣд. $o = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b}$, и $C = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b}$; слѣд. $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b} - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$, или $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'}{b}$. Это уравненіе изображаетЪ время, вЪ которое тѣло пробѣгаетЪ всякую дугу AM, время считаемое по секундамЪ.

Но когда дуга AM превращается вЪ AB, то есть, на половинѣ размаха, тогда дуга

ZM′ становится ZM′B; и потому назвавъ $\frac{1}{2}T$ продолженіе половины размаха, получимъ $\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'B}{b}$, или $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \ldots \frac{2ZM'B}{b}$.

Но естьли представимъ чрезъ $1 : c$ содержаніе діаметра къ окружности круга, то получимъ $1 : c = b : 2ZM'B$, и слѣд. . . $\frac{2ZM'B}{b} = c$; почему $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times c$, или $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. Это выраженіе означаетъ продолженіе всего размаха. А какъ это количество не заключаетъ въ себѣ b, которое опредѣляетъ высоту паденія AB, то слѣдуетъ заключить, что время T ни мало не зависитъ отъ длины дуги, пока она будетъ мала. И такъ *размахи по малымъ дугамъ круга бываютъ одновременны.*

444. Все сказанное нами приличествуетъ маятникамъ. *Маятникомъ* называется вообще всякая нитка или проволока, которая однимъ концомъ своимъ прицѣпляется къ постоянной точкѣ C (*фиг. 30*), а другимъ держитъ одно или многія тѣла. Маятникъ бываетъ *простой*, когда на ниткѣ или на проволокѣ привѣшивается одно тѣло, имѣющее весьма

малый діаметрѣ вѣ сравненіи сѣ длиною нитки. На первый случай мы будемѣ говорить о простомѣ маетникѣ.

Когда удалишь маетникѣ отѣ вертикальнаго положенія CB, то усиліе тяжести на массу, перенесенную вѣ A, дѣйствуя по вертикалу AM, не все употребляется на движеніе тѣла; нѣкоторая часть его производитѣ дѣйствіе свое и на точку C. И такѣ усиліе AM раздѣляется на два другія, на AN имѣющее направленіе по CAN, это усиліе уничтожается; и на другое AP, которое движетѣ тѣло по дугѣ AB. А поелику радіусѣ CA перпендикулярень кѣ дугѣ, и потому движеніе раздѣляется вѣ настоящемѣ случаѣ такѣ, какѣ бы тѣло упадало свободно по дугѣ AB, имѣющей радіусомѣ длину CA маетника. Отсюда явствуетѣ, что все сказанное нами выше приличествуетѣ непосредственно маетникамѣ: вотѣ и заключенія, которыя можно вывести для нихѣ изѣ предыдущей выкладки.

445. Мы нашли продолженіемѣ размаха $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. И такѣ для другаго маетника, имѣющаго длиною a' и совсѣмѣ другую тяжесть, способную сообщить ему скорость

p' вЂ секунду времени, получимЂ, назвавЂ T′ продолженіе размаха его, $T' = c\sqrt{\frac{a'}{p'}}$.

СлѢд. $T : T' = c\sqrt{\frac{a}{p}} : c\sqrt{\frac{a'}{p'}} = \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$; то есть, *вЂ двухЂ маетникахЂ, имѣющихЂ различныя длины и тяжести, продолженія размаховЂ содержатся между собою какЂ квадратные корни изЂ длины ихЂ, раздѢленные на квадратные корни тяжестей.*

446. Поелику тяжесть дѢйствуетЂ одинаково вЂ одномЂ мѢстѢ, то должно заключить, что продолженія размаховЂ содержатся какЂ квадратные корни изЂ однихЂ длинЂ маетниковЂ.

447. Но ежели на одномЂ маетникѢ повѢсишь попеременно двѢ разныя тяжести, то a здѢлается вЂ такомЂ случаѢ равно a', и мы получимЂ $T : T' = \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a}{p'}} = \sqrt{ap'} : \sqrt{ap} = \sqrt{p'} : \sqrt{p}$; то есть, продолженія размаховЂ будутЂ находиться вЂ обратномЂ содержаніи сЂ квадратными корнями изЂ тяжестей.

448. Естьли положимъ n за число размаховъ маетника a въ определенное время, на примѣръ въ часъ или $3600''$, то получимъ $T = \frac{3600''}{n}$. Равномѣрно представивъ чрезъ n' число размаховъ въ тоже время маетника a', будемъ имѣть $T' = \frac{3600''}{n'}$. Слѣд. . .

$T : T' = \frac{3600''}{n} : \frac{3600''}{n'} = n' : n$; то есть, числа размаховъ, производимыя въ одинакое время двумя маетниками разной длины, находятся между собою въ обратномъ содержаніи съ продолженіями каждаго размаха.

А поелику $T : T' = \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$, то получимъ также $n : n' = \sqrt{\frac{a'}{p'}} : \sqrt{\frac{a}{p}}$; а это показываетъ, что *числа размаховъ, производимыхъ въ одинакое время двумя маетниками, разной длины и съ разными тяжестями будутъ находиться между собою въ обратномъ содержаніи съ квадратными корнями изъ длины маетниковъ, раздѣленными на квадратные корни тяжестей.* И слѣд. естьли тяжести будутъ одинаковы, то числа размаховъ будутъ въ обратномъ

содержанiи съ квадратными корнями изъ одинхъ длинъ маятниковъ; а естьли длины будутъ одинаковы, то числа размаховъ будутъ прямо пропорцiональны квадратнымъ корнямъ тяжестей.

449. Замѣчено, что одинъ маятникъ, переносимый на разныя мѣста земли, не дѣлаетъ одинакое число размаховъ въ одинакое время; и потому должно заключить, что тяжесть дѣйствуетъ не одинаково во всѣхъ мѣстахъ; по числу размаховъ, здѣланному маятникомъ въ опредѣленное время на каждомъ мѣстѣ, судимъ о уменьшенiи или усугубленiи дѣйствiя тяжести. Въ сообразность сего удостовѣрились, что тяжесть при приближенiи къ экватору уменьшается, а къ полюсамъ увеличивается: причину сего покажемъ ниже.

450. По доказанному свойству, что числа размаховъ, здѣланныхъ въ одинакое время двумя разными маятниками съ одинакою тяжестiю, находятся во взаимномъ содержанiи съ квадратными корнями изъ длинъ этихъ маятниковъ, можно вывести способъ опредѣлять длину секунднаго маятника въ какомъ нибудь мѣстѣ; и вотъ какимъ образомъ.

Повѣсь на весьма тонкой проволокѣ такое тѣло, которое бы было небольшой величины, но довольно вѣско, на примѣръ свинцовой, мѣдной или золотой шарикъ, и здѣлай проволоку отъ точки прицѣпленiя до центра шарика опредѣленной длины, однако не менѣе трехъ футовъ, вымѣрявъ со всею точностiю. Потомъ пустивъ маятникъ на ходъ, сочитай число размаховъ его въ опредѣленное время (мы предполагаемъ здѣсь въ часъ), и здѣлай такую пропорцiю:

какЪ 3600 искомое число размаховЪ, которое долженЪ бы здѣлать маятникЪ, содержится кЪ числу наблюденныхЪ размаховЪ, такЪ квадратной корень изЪ длины маятника, употребленной на опытѣ, кЪ четвертому члену, которой покажетЪ квадратной корень длины секунднаго маятника; составивЪ изЪ этого корня квадратЪ, получимЪ самую длину. По этой пропорціи опредѣлили, что простой маятникЪ, дѣлающій каждой размахЪ вЪ секунду времени, долженЪ на Парижской широтѣ быть длиною 3ф од 8л, 57. Эта мѣра найдена по многимЪ весьма рачительнымЪ опытамЪ.

451. Теперь не трудно опредѣлить, на какое разстояніе должно спуститься тѣло вЪ первую секунду своего паденія, тѣло, которому воздухЪ не дѣлаетЪ чувствительнаго препятствія вЪ продолженіи сего времени.

Ибо по уравненію $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, выводимЪ $p = \frac{acc}{TT}$ такую величину, вЪ которой p показываетЪ пріобрѣтенную скорость тяжелымЪ тѣломЪ вЪ первую секунду паденія, и которая (165) вдвое больше высоты, откуда оно упадаетЪ вЪ это же время; a есть длина маятника, производящаго размахи во время T, такЪ что ежели вмѣсто T примемЪ секунду, a должно равняться 3ф од 8л, 57 или 440л, 57. НаконецЪ c показываетЪ содержаніе окружности кЪ діаметру, и равняется $\frac{355}{113}$; слѣд. $p = \left(\frac{355}{113}\right)^2 \times 440{,}57 = 4348^л{,}25146$, или по приведеніи вЪ футы $= 30^ф{,}19619$. И такЪ пространство, описанное

тяжелымЪ тѣломЪ вЪ первую секунду своего паденія, будетЪ 15ф,09809; а это обѣщались мы доказать (172).

452. Ежели представимЪ чрезЪ t время, которое нужно тяжелому тѣлу, упадающему свободно, на то, чтобЪ спуститься по діаметру BD или $2a$ (*фиг. 29*); то получимЪ (175) $2a = \frac{pt^2}{2}$, и слѣд. $\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{1}{2}t$. ВставивЪ эту величину вЪ уравненіе $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, будемЪ имѣть $T = \frac{1}{2}ct$, или $\frac{1}{2}T = \frac{1}{4}ct$; но это дѣлаетЪ $\frac{1}{2}T : t = \frac{1}{4}c : 1$; то есть, продолженіе спуска по какой нибудь малой дугѣ AB содержится кЪ времени паденія по діаметру такЪ, какЪ четверть окружности кЪ діаметру. Но четверть окружности меньше діаметра, и потому должно заключить, что тѣло употребляетЪ меньше времени на паденіе по малой дугѣ круга, котораго нижній тангенсЪ есть горизонтальная линея, чѣмЪ на паденіе по діаметру. А поелику время паденія по діаметру бываетЪ (430) одинаково со временемЪ паденія по какой нибудь хордѣ AB; то должно также заключить, что тѣло скорѣе достигнетЪ изЪ A вЪ B, спускаясь по дугѣ AB, чѣмЪ по прямой линеѣ AB. И такЪ хотя

прямая линея есть самой кратчайшій путь, однако не всегда бываетъ такой, на прохожденіе котораго требуется менѣе времени.

О Движеніи по кривой линеѣ вообще.

453. Поелику тѣло, однажды приведенное въ движеніе, должно (естьли исключимъ всякое препятствіе) продолжать оное всегда съ одинакою скоростью и въ одинакомъ направленіи (150); и потому разсуждаемъ, что тѣло не иначе можетъ описать кривую линею, какъ развѣ постигнетъ его новая сила или препятствіе, которое въ каждое мгновеніе будетъ перемѣнять прежнее направленіе движенія его.

Естьли сила, дѣйствующая на движимое по направленію противному съ тѣмъ, которому оно послѣдуетъ, дѣйствуетъ по временамъ конечнымъ, и сообщаетъ въ каждое продолженіе времени конечную скорость; то тѣло въ такомъ случаѣ опишетъ многоугольникъ. На примѣръ когда тѣло, описывающее прямую линею AB (*фиг. 31*), пришедъ въ B, получитъ новое побужденіе, по силѣ котораго должно описать BE въ тоже время; тогда оно вмѣсто того, чтобъ описать BD = AB, должно будетъ описать (191) діаго-

наль BC параллелограмма BECD. Равномѣрно естьли на тожъ тѣло, когда оно пришедъ въ C, будетъ стремиться описывать CG равную и въ прямомъ положеніи съ BC, подѣйствуетъ новая сила CH и заставитъ его описывать въ тоже время CH; то оно опишетъ на самомъ дѣлѣ діагональ CF параллелограмма CHFG, и такъ далѣе; такъ что тѣло получая на пути своемъ послѣдовательныя препятствія, принуждено будетъ описать бока AB, BC, CF и проч. какого нибудь многоугольника.

454. Но естьли на движимое, получившее сначала конечную скорость, начнетъ потомъ дѣйствовать другая сила безпрерывно, совращая его съ пути; или, что все равно, ежели эта сила дѣйствіемъ своимъ въ безконечно малыя времена будетъ впечатлѣвать тѣлу безконечно малыя степени скорости; тогда бока BC, CF, описанные въ продолженіе каждаго мгновенія, будутъ безконечно малы; и линеи BE, CH, означающія безконечно малыя дѣйствія силы, измѣняющей движеніе, будучи безконечно малы въ сравненіи съ линеями BC, CF означающими дѣйствительную скорость движимаго, дѣлаютъ углы BCE, CFH, или равныя имъ DBC, GCF также безконечно малые; и слѣд. путь движимаго

представитЬ собою кривую линею. Отсюда явствуетЬ, что для произведенія кривой линеи сила не только должна дѣйствовать по безконечно малымЬ мгновеніямЬ, но и еще дѣйствіе ея по собственному направленію должно быть вЬ каждое мгновеніе безконечно мало. Таково бываетЬ дѣйствіе тяжести вЬ каждое мгновеніе: таково бываетЬ сопротивленіе жидкостей вЬ каждое мгновеніе движенія.

455. БудетЬ ли сила дѣйствовать на движимое наподобіе силы дѣйствительной, каково на примѣрЬ дѣйствіе происходитЬ отЬ тяжести; или наподобіе силы страдательной, каково происходитЬ отЬ сопротивленія неподвижной точки, или жидкости находящейся вЬ покоѣ, или всякой другой преграды; но мы всегда бываемЬ вольны почитать движеніе произходящимЬ изЬ сложныхЬ движеній, какЬ то показано вЬ приведенномЬ теперь примѣрѣ; или принимать его выходящимЬ изЬ сложныхЬ движеній такимЬ образомЬ.

На примѣрЬ, когда тѣло пришедЬ вЬ B (*фиг. 32*), готово принять дѣйствіе силы BE, то можно (287) вообразить движеніе BD, которое бы должно имѣть тѣло безЬ этой новой силы, раздѣленнымЬ на движеніе

ВС, которое оно дѣйствительно получитъ и на другое BI, которое не должно произвести никакого дѣйствія, и слѣд. должно быть равно и прямо противуположно усилію BE. Равномѣрно движеніе CG тѣла, пришедшаго въ C, можно вообразить раздѣленнымъ на движеніе CF, которое оно дѣйствительно получитъ, и на движеніе CK равное и прямо противуположное усилію CH.

456. Тѣло, движущееся по кривой линеѣ, можно почитать въ каждое мгновеніе такъ, какъ бы оно двигалось по тангенсу той точки, гдѣ оно находится; такъ что естьли бы сила, совращающая его съ пути въ каждое мгновеніе, перестала на него дѣйствовать, то оно стало бы продолжать двигаться по тому тангенсу.

457. *Силою центральною* называется вообще такая сила, которая совращаетъ тѣло въ каждое мгновеніе съ пути, и заставляетъ его описывать кривую линею. Естьли движеніе будетъ относиться къ какой нибудь постоянной точкѣ, то сила, стремящаяся приближить тѣло къ сей точкѣ, называеться *центроклонною*; а та напротивъ, которая будетъ стремиться удалить тѣло отъ этой точки, называется *центробѣжною* силою.

458. Поелику тѣло, описывающее кривую линею, должно перестать описывать ее и продолжать движеніе по тангенсу, когда центральная сила перестанетъ на него дѣйствовать; то явствуетъ, что тѣло М (*фиг. 33*) относительно къ какой нибудь точкѣ А, взятой на боку излучины, по силѣ криваго своего движенія имѣетъ въ самомъ дѣлѣ центробѣжную силу, потому что стремясь двигаться по МТ, оно силится чрезъ то удалиться отъ точки А, къ которой не иначе можно привести его, какъ по дѣйствію центральной силы.

О Движеніи въ кругѣ и о центробѣжной силѣ.

459. Дабы свободное и неимѣющее тяжести тѣло А (*фиг. 34*), двинуто будучи по какому нибудь направленію АР, могло описать кругъ по дѣйствію впечатлѣнной ему скорости и по постоянной силѣ, постоянно направленной къ точкѣ С; то должно вопервыхъ направленію РА быть перпендикулярнымъ къ линеѣ АС, которая соединяетъ точку А отшествія съ точкою С. Но этого допущенія еще не довольно, а надобно при томъ, чтобъ впечатлѣнная скорость имѣла извѣстную мѣру.

Положимъ, что безконечно малая линея AB представляетъ пространство, которое бы тѣло должно описать въ мгновеніе безъ дѣйствія центральной силы, а линея AD безконечно меньше той (454), означаетъ пространство, которое центральная сила дѣйствуя безпрерывно на тѣло, заставляетъ описывать его въ тоже мгновеніе. Поелику AB безконечно мала, то можно почитать центральную силу такъ, какъ бы она дѣйствовала на движимое параллельно съ AD; и слѣд. по проведеніи B*b* параллельно съ AD, надобно скорости AB быть такого свойства, чтобъ количество B*b*, на которое она отдалитъ тѣло, было равно AD. Посмотримъ же, какъ по этому условію можно опредѣлить содержаніе центральной силы ко впечатлѣнной скорости.

Продолжимъ радіусъ AC до пересѣченія его въ E съ окружностью. По свойству круга будемъ имѣть $(Db)^2 = AD \times DE$. А поелику AB безконечно мала, то должно почитать DE равнымъ AE или 2CA, и слѣд. $(Db)^2$ или $(AB)^2 = AD \times 2CA$.

Представивъ чрезъ V впечатлѣнную скорость, получимъ (179) $AB = Vdt$. Слѣд. $V^2dt^2 = (AB)^2 = AD \times 2CA$.

Представимъ чрезъ g скорость, которую центральная сила можетъ сообщить въ секунду времени движимому, которое подвержено одному ея дѣйствію, повторяемому одинаково въ каждое мгновеніе. Въ такомъ случаѣ пространство, по этой силѣ описанное въ мгновеніе dt, будетъ (166) $\frac{gdt^2}{2}$. Слѣд. AD $= \frac{gdt^2}{2}$; слѣд. $V^2dt^2 = \frac{gdt^2}{2} \times 2CA$, или $V^2 = g \times CA$. Положимъ h за высоту, откуда упавъ тяжелое тѣло, должно пріобрѣсти скорость V, а p за скорость тяжести въ одну секунду, и мы получимъ $V^2 = 2ph$ (176). Слѣд. $2ph = g \times CA$; отсюда выходитъ $g : p = 2h : CA = h : \frac{1}{2}CA$; то есть, дабы свободное и не имѣющее тяжести тѣло могло описать окружность круга опредѣленнаго радіуса, по силѣ направленной къ центру и по скорости впечатлѣнной ему сначала, то надобно, чтобъ центральная сила содержалась къ тяжести, какъ такая высота, съ которой бы тяжелое тѣло упавъ должно пріобрѣсть равную скорость со впечатлѣнною, къ половинѣ радіуса. И слѣд. ежели центральная сила со впечатлѣнною скоростью не будутъ имѣть такого содержанія, то тѣло не можетъ описать окружности круга; когдажъ сіе содержаніе

будетъ имѣть мѣсто, тогда тѣло опишетъ дугу A*b*.

460. Поелику центральная сила имѣетъ направленіе къ центру C, и слѣд. перпендикулярна къ дугѣ; а потому она ни увеличиваетъ, ни уменьшаетъ скорость движимаго тѣла. Слѣд. тѣло пришедъ въ точку *b*, будетъ относительно къ центральной силѣ въ такихъ же обстоятельствахъ, какъ было въ точкѣ A. Отсюда заключимъ, что *естьли тѣло описываетъ окружность круга по побужденію центральной силы и впечатлѣнной ему скорости; то скорость его бываетъ однообразна, и центральная сила постоянна.*

461. Когда тѣло A (*фиг.* 35) не будетъ свободно, то есть, когда оно будетъ въ постоянной точкѣ C удерживаемо невытягаемою ниткою, или другимъ какимъ нибудь способомъ; тогда оно получивъ побужденіе по какому нибудь направленію, стремящемуся удалить его отъ центра, должно по необходимости описать окружность, имѣющую радіусомъ CA; и вотъ какъ надобно понимать происхожденіе сего движенія.

Тѣло, въ какой бы точкѣ А ни находилось, будетъ всегда стремиться (456) описывать тангенсъ АВ. А какъ оно не можетъ послѣдовать сему движенію, то это движеніе должно (287) раздѣлиться на два другія, на одно *Ab* по направленію окружности, и которое въ самомъ дѣлѣ совершится, и на другое AD, которое уничтожится; и такъ надобно сему послѣднему имѣть направленіе по CAD, потому что уничтоженіе его происходитъ отъ сопротивленія неподвижной точки. Движеніе въ семъ случаѣ будетъ происходить также, какъ и въ предыдущемъ, съ тою только разностію, что центральная сила изъ центроклонной превращается въ центробѣжную. И такъ все сказанное нами въ первомъ случаѣ имѣетъ равно и здѣсь мѣсто; а именно: 1) движеніе будетъ однообразно; 2) центробѣжная сила будетъ одинакова во всякой точкѣ окружности, или, что все равно; нитка будетъ натягиваема повсюду съ одинакою силою; 3) центробѣжная сила будетъ содержаться къ тяжести, какъ высота, съ которой бы тѣло должно упасть для пріобрѣтенія дѣйствительной скорости движимаго А, къ половинѣ радіуса СА.

На примѣръ, положивъ, что тѣло вѣсомъ одного фунта обращается на снуркѣ длиною 5 футовъ со ско-

ростью 30,2ф въ секунду, должно заключить, что высота приличная этой скорости будетъ 15,1 футовъ, а центробѣжная сила къ тяжести содержится = $15,1 : \frac{5}{2} = 30,2 : 5 = 6,04 : 1$. И такъ вѣсъ одного фунта натягиваетъ снурокъ такъ, какъ бы натягивалъ его неподвижной вѣсъ 6 фунтовъ и $\frac{4}{100}$; потому что силы или количества движенія, которыя тѣло A можетъ получать по дѣйствію своей тяжести и центробѣжной силы, содержатся между собою какъ скорости g и p, происходящія отъ этихъ двухъ силъ въ одно время.

462. Положимъ теперь, что тяжелое тѣло D (*фиг.* 28), удерживаемое въ неподвижной точкѣ C ниткою CD, качается около точки C, и описываетъ дуги ADI извѣстной величины. Естьли захотимъ узнать, по пришествіи его въ точку D, чѣмъ увеличиваетъ центробѣжная сила усиліе его посредствомъ вѣса на точку C; то должно провести перпендикуляръ AF, и въ такомъ случаѣ FD означитъ (436) высоту приличную той скорости, которую оно имѣетъ въ D. Слѣд. (459) центробѣжная сила будетъ содержаться къ тяжести = DF : $\frac{1}{2}$CA, то есть, какъ обращенный синусъ дуги AD къ половинѣ радіуса. Такимъ образомъ взявъ дугу AD 10 градусовъ, которой синусъ обращенный есть близу $\frac{1}{66}$ радіуса, найдемъ, что центробѣжная сила будетъ содержаться къ тяжести = $\frac{1}{66} : \frac{1}{2} = 1 : 33$; то есть, вѣсъ увеличится почти $\frac{1}{33}$.

Отсюда явствуетъ, что при переноскѣ боченка A (*фиг.* 36), привязаннаго веревкою AC къ коромыслу MN, которой несутъ на плечахъ два человѣка, можетъ произойти великая неудобность, когда одинъ изъ носильщиковъ не будетъ удерживать рукою качанія бремени A. Однако надобно замѣтить, что

при малыхъ колебаніяхъ усугубленіе вѣса причиняемое центробѣжною силою, уменьшается въ гораздо большемъ содержаніи дугъ; оно уменьшается пропорціонально квадрату хорды описанной дуги, или квадрату самой дуги. На пр. взявъ дугу вмѣсто 10 градусовъ одного только, получимъ обращеннымъ синусомъ ея $\frac{15}{100000}$ часть радіуса; и слѣд. дѣйствіе центробѣжной силы не болѣе будетъ $\frac{3}{10000}$ всего вѣса.

463. Теперь не трудно сравнить центробѣжныя силы двухъ какихъ нибудь движимыхъ, описывающихъ окружности съ данными скоростями или въ данное время.

Ибо по уравненію $V^2 = g \times CA$, найденному нами выше, выводимъ $g = \frac{V^2}{CA}$. А поелику g означаетъ скорость, которую центральная сила сообщаетъ движимому въ секунду времени, дѣйствуя на него непрерывно и равно въ каждое мгновеніе, то gdt изобразитъ ту, которую она сообщитъ ему въ мгновеніе, а $A \times gdt$ будетъ количество движенія тѣла въ каждое мгновеніе; слѣд. это количество движенія будетъ $= \frac{A \times V^2 dt}{CA}$, по вставкѣ величины g. И такъ назвавъ F совершенную центральную силу, или количество движенія A, будемъ имѣть $F = \frac{A \times V^2 dt}{CA}$; наконецъ предста-

вивъ чрезъ R радіусъ CA, получимъ $F = \frac{AV^2 dt}{R}$. Слѣд. для другой массы A', описующей со скоростью V' окружность, имѣющую радіусомъ R', получимъ, назвавъ F' центробѣжную его силу, $F' = \frac{A'V'^2 dt}{R'}$. Слѣд. $F : F' = \frac{AV^2 dt}{R} : \frac{A'V'^2 dt}{R'}, = \frac{AV^2}{R} : \frac{A'V'^2}{R'}$; то есть, вообще *центробѣжныя силы двухъ движимыхъ содержатся между собою, какъ массы умноженныя на квадраты скоростей, и раздѣленныя на радіусы описанныхъ окружностей.*

464. Положимъ, что C и C' означаютъ оныя окружности, а T и T' времена, употребляемыя двумя тѣлами на коловращеніе. Но поелику коловратныя движенія ихъ однообразны, то получимъ $V = \frac{C}{T}$, и $V' = \frac{C'}{T'}$ (153). По представленіи содержанія радіуса къ окружности чрезъ $1 : c$, выходитъ $C = cR$, и $C' = cR'$; слѣд. $V = \frac{cR}{T}$, и $V' = \frac{cR'}{T'}$. Вставивъ вмѣсто V и V' сіи величины въ найденной выше пропорціи,

будемъ имѣть $F : F' = \frac{Ac^2R^2}{RT^2} : \frac{A'c^2R'^2}{R'T'^2} = \frac{AR}{T^2} : \frac{A'R'}{T'^2}$; то есть, *центробѣжныя силы содержатся какъ массы, умноженныя на радіусы, и раздѣленныя на квадраты времянъ коловращенія.*

465. По содержанію найденному (459) между тяжестію и центробѣжною силою, не трудно понять, что когда одно твердое тѣло, или многія соединенныя между собою, начнутъ обращаться около неподвижной точки, то части сихъ тѣлъ, удаленныя отъ центра, будутъ силиться разорваться; это усиліе можетъ быть гораздо болѣе ихъ вѣсу. А то, что мы доказали (464) показываетъ что естьли эти же тѣла будутъ совершать кругообращенія свои въ одно время, то центробѣжныя силы ихъ становятся въ такомъ случаѣ пропорціональны массамъ, умноженнымъ на радіусы; и слѣд. одинакія части тѣмъ болѣе окажутъ усилія оторваться, чѣмъ далѣе будутъ находиться отъ центра коловращенія.

Естьли тяжелая или не тяжелая жидкость начнетъ вертѣться, то части ея без-

престанно будутъ силиться отскочить и удалиться отъ центра.

На примѣръ ежели въ цилиндрическомъ сосудѣ ADFC (*фиг.* 37), наполненномъ водою, здѣлано будетъ отверстіе въ какой нибудь точкѣ R, то вода при сильномъ обращеніи его по оси GH неминуемо брызнетъ по отверстію.

466. Это же правило руководствовало къ выдумкѣ вентиляторовъ или такихъ машинъ, посредствомъ которыхъ можно освѣжать воздухъ на корабляхъ или въ гошпиталяхъ. Неподвижный мѣхъ ABC (*фиг.* 38), имѣетъ къ сторонѣ AC отверстіе съ трубкою FAC. Зубчатое колесо Z, поддерживаемое стойкою DR, обращаясь поворачиваетъ шестерню X, которой веретено снабжено крыльями *ae*, *bf* и проч. коловращающимися въ коробочкѣ (*фиг.* 39) помѣщенной во внутренности мѣха. Отъ коловращенія крыльевъ воздухъ приходитъ въ движеніе и получаетъ центробѣжную силу, которая выгоняетъ его по отверстію F. По близости къ центру X (*фиг.* 38) находится нѣсколько диръ P, Q и проч., чрезъ которыя входитъ новой воздухъ и выходитъ такъ, какъ прежде, по отверстію F. Желающіе получить болѣе свѣденія о средствахъ, изобрѣтенныхъ для освѣженія воздуха, могутъ ихъ найти въ сочиненіи Гна. Дюгамеля, подъ названіемъ: Moyens de conferver la fanté aux équipages; и въ запискахъ Гна Бигота: Sur la corruption de l'air dans les vaiffeaux.

467. Сферическая масса жидкости, которой части будутъ побуждаемы единственнымъ стремленіемъ къ постоянной точкѣ C центру ея (*фиг.* 40), должна сохранить безъ перемѣны круглой свой видъ, естьли это стремленіе или тяжесть къ точкѣ C бу-

детъ всегда одинаково на равныхъ разстояніяхъ отъ С; въ этомъ нѣтъ сомнѣнія. Но ежели таже самая масса получитъ круговое обращеніе около какой нибудь прямой линеи AB. то она не можетъ больше удержать прежняго вида. Ибо всякая частица M, описывая въ такомъ случаѣ кругъ, имѣющій радіусомъ PM, получаетъ извѣстную центробѣжную силу, которая стремится удалить ее отъ центра P пропорціонально разстоянію ея PM (464). И такъ представивъ это усиліе чрезъ Mm, и усиліе тяжести или стремленіе къ центру С чрезъ MO, и вообразивъ параллелограммъ mMOR, получимъ въ MR направленіе, по которому частица M будетъ побуждаема двигаться. А какъ сила MO остается одинакова для каждой частицы, лежащей на поверхности, сила же Mm перемѣняется и уменьшается по мѣрѣ удаленія отъ большаго круга или экватора EQ; то явствуетъ, что совершенныя силы MR, возбуждающія дѣйствительно оныя частицы, бываютъ всѣ различны, и имѣютъ направленіе къ разнымъ точкамъ. И такъ масса должна лишиться сферическаго своего вида; но какой бы видъ она ни приняла, онъ будетъ (297) таковъ, что всякая совершенная сила, возбуждающая принадлежащую себѣ частицу поверхности, должна быть перпендикулярна къ новой поверхности. Слѣд. новая фигура TVNX, которую получитъ масса, должна быть такова, въ которой MR будетъ ей перпендикулярна; слѣд. эта масса должна быть сжата къ полюсамъ X и V и вздута при экваторѣ, который изъ EQ превратится въ TN.

Этотъ случай въ точности принадлежитъ нашей землѣ, которая, состояла ли бы въ началѣ вся изъ жидкости, или частію изъ жидкости и частію изъ твердаго тѣла, должна при самомъ происхожденіи своемъ получить сплюснутую фигуру; а безъ этого бъ

могло продолжиться всеобщее испровержение до тѣхъ поръ, пока наконецъ она не приняла бы такой фигуры, какая прилична для коловратнаго движенія.

МО есть настоящее направленіе тяжести, не той однакожъ, которой примѣчаемъ дѣйствія, а той, которая бы должна быть безъ коловратнаго движенія земли. MR есть направленіе той, которой примѣчаемъ дѣйствія, и по этой-то линеѣ упадаютъ тѣла на поверхность земную въ М. Почему дѣйствительная тяжесть не побуждаетъ тѣла стремиться къ самому центру земли. Но какъ по достовѣрнымъ наблюденіямъ найдено, что земля относительно къ радіусу экватора не такъ много сжата, и потому точка S весьма мало разнится отъ точки С.

Поелику уголъ mМО необходимо долженъ быть тупой, то не трудно примѣтить, что MR будетъ всегда меньше МО, и тѣмъ менѣе, чѣмъ точка М будетъ ближе къ экватору; слѣд. тяжесть, начиная отъ полюсовъ, уменьшается до самаго экватора. Въ сходственность сего длина маятника, показующаго секунды, не можетъ быть (449) одинакова на всякомъ мѣстѣ земли; ее должно убавлять при приближеніи къ экватору.)

При полюсахъ, гдѣ центробѣжной силы нѣтъ никакой, тяжесть дѣйствуетъ такъ, какъ бы земля была неподвижна. При экваторѣ, гдѣ центробѣжная сила прямо-противоположна начальной тяжести, тяжесть умаляется всѣмъ количествомъ центробѣжной силы. Въ промежуточныхъ мѣстахъ уменьшеніе тяжести убываетъ по двумъ причинамъ; вопервыхъ потому, что центробѣжная сила не буду-

чи прямо-противуположна начальной тяжести, истребляетЪ только нѣкоторую ея часть, и тѣмЪ меньшую, чѣмЪ дуга МТ будетЪ больше; а вовторыхЪ потому, что центробѣжная сила уменьшается сама по мѣрѣ удаленія точки М отЪ экватора.

О Движеніи бросаемыхЪ тѣлЪ вЪ пустотѣ.

468. Всякое тѣло, кинутое сЪ какою нибудь силою, послѣдуетЪ данному ему направленію и вмѣстѣ повинуется дѣйствію своей тяжести.

Естьли бы тѣло, которое пущено по какому нибудь направленію АВ (*фиг.* 41) вЪ пустотѣ или серединѣ, не дѣлающей никакого сопротивленія, было безЪ тяжести, или бы тяжесть его не имѣла никакого дѣйствія; то оно должно бы двигаться (150) вѣчно по направленію АВ сЪ одинакою скоростью.

Но тяжелое тѣло пребываетЪ на данномЪ ему направленіи АВ одно только мгновеніе. Дѣйствіе тяжести вмѣстѣ со скоростью пустившей его силы перемѣняютЪ ежемгновенно направленіе и скорость его, и заставляютЪ описывать его кривую линею, имѣющую вЪ точкѣ отшествія тангенсомЪ линею АВ, по направленію которой оно было пущено.

Дабы получить совершенное понятіе, какимъ образомъ брошенное тѣло движется; то вообразимъ себѣ, что ACD есть линея, которую оно описываетъ и на которой оно находится въ точкѣ F. Естьли допустимъ безконечно малую дугу EF тѣмъ количествомъ, которое оно описываетъ въ одно мгновеніе, и потомъ продолжимъ EF, принявъ ее прямою линеею, на количество Fg = EF, то не трудно примѣтить, что оно (150) въ другое равное мгновеніе должно описать Fg. А какъ тяжесть дѣйствуетъ безпрерывно, то предположивъ, что тѣло по силѣ тяжести способно въ тоже мгновеніе спуститься вертикально на количество равное Fi, должно заключить, что кинутое тѣло, находясь въ точкѣ F, будетъ подвержено дѣйствію двухъ силъ Fg и Fi, и слѣд. должно будетъ описать (191) діагональ Fk параллелограмма, начерченнаго по линеямъ Fg и Fi, принятымъ за бока его. Таковъ есть образъ движенія тѣла, перемѣняющаго въ каждое мгновеніе путь свой.

469. Хотя разсматривая такимъ образомъ движеніе, не трудно заключить о натурѣ и свойствахъ кривой линеи, которую брошенное тѣло должно описать; но какъ для опредѣленія сей кривой

линей нужно употреблять интеграцію; то мы убѣгая затрудненій, постараемся дойти до той же цѣли легчайшими путями.

470. Ежели вмѣсто тяжелаго тѣла примемъ его безъ тяжести, и въ самое то время, когда оно будетъ двигаться по линеѣ AB, вообразимъ, что эта линея AB (*фиг.* 42) начнетъ опускаться вертикально и параллельно сама къ себѣ наподобіе тяжелыхъ тѣлъ; то не трудно понять, что брошенное тѣло опишетъ такую жъ кривую линею, какую бы оно описать должно натурально; ибо въ каждое мгновеніе оно будетъ находиться ниже направленія AB на такое точно количество, на какое бы оно должно спуститься въ тоже время по дѣйствію своей тяжести.

По предположеніи сего, вообразимъ, что AC означаетъ скорость стремленія тѣла, или ту способность, которую бросившая сила дала ему описывать это пространство въ опредѣленное время, на примѣръ въ секунду; представимъ чрезъ AP количество, на которое тѣло спускается по силѣ тяжести въ первую секунду, и проведемъ PD параллельно съ AB. По такому предположенію линея AB должна притти въ положеніе PD тогда, ког-

да брошенное тѣло пробѣжитъ на этой линеѣ количество AC; и слѣд. по проведенiи CM параллельнной съ AP, точка M покажетъ то мѣсто, гдѣ будетъ находиться тѣло по истеченiи секунды.

Равномѣрно взявъ AB вдвое больше AC, заключимъ, что кинутое тѣло должно по прошествiи двухъ секундъ находиться въ B безъ дѣйствiя своей тяжести. Но взявъ на вертикалѣ AP количество AP′ въ четверо больше AP, получимъ въ AP′ (172) то количество, на которое направленiе AB опустится по прошествiи двухъ секундъ; слѣд. по проведенiи линей BM′ и PM′ параллельныхъ съ AP и AB, точка M′ будетъ то мѣсто, гдѣ должно находиться брошенное тѣло въ концѣ второй секунды.

Такимъ же образомъ взявъ AO втрое больше AC, а AP″ вдевятеро AP, и проведши OM″ и P″M″ параллельно съ AP и AB, докажемъ, говорю, также, что точка M″ будетъ мѣсто брошеннаго тѣла по прошествiи трехъ секундъ.

Но по такому чертежу замѣчаемъ: 1) что линеи AP″, AP′, AP содержатся пропорцiонально квадратамъ временъ. 2) Что

линеи AC, AB, AO, или равныя имъ PM, P'M', P''M'' пропорціональны просто временамъ; и слѣд. линеи AP, AP', AP'' содержатся какъ квадраты сходственныхъ линей PM, P'M', P''M''. Отсюда и изъ сказаннаго (*Алг.* 301.) заключаемъ безъ всякаго сомнѣнія о кривой линеѣ, что она должна быть парабола, потому что квадраты ордонатъ PM параллельныхъ съ тангенсомъ AB, содержатся между собою какъ сходственныя обедиссы AP.

А чтобъ легче вывести всѣ прочія свойства этой кривой линеи, то здѣлаемъ предъидущій чертежъ общимъ.

471. Положимъ, что линея AE (*фиг. 43*) представляетъ впечатлѣнную скорость, или число футовъ, которое движимое должно описать въ каждую секунду, когда бы оно сохранило навсегда эту скорость, и допустимъ, что скорость сія при отшествіи тѣла изъ точки A, составляется изъ двухъ другихъ, изъ одной AD горизонтальной и другой AF вертикальной. Отсюда явствуетъ, что направленіе тяжести, будучи вертикально или перпендикулярно къ AD, не можетъ дѣйствіемъ своимъ ни уменьшить, ни увеличить скорости AD;

и потому въ какомъ бы мѣстѣ ни находилось тѣло въ продолженіи своего движенія, оно должно сохранить одинакую скорость параллельно съ горизонтомъ. Чтожъ принадлежитъ до скорости по AF, то движимое по силѣ постоянной своей скорости, параллельной съ горизонтомъ, удалившись отъ A на нѣкоторое разстояніе AP, не можетъ подняться на такую высоту PN, на которую бы оно взошло безъ дѣйствія тяжести, но опустится до какой нибудь точки M, лежащей на томъ же вертикалѣ PN; потому что вертикальная скорость тѣла будучи прямопротивуположна дѣйствію *тяжести*, должна уменьшиться всѣмъ тѣмъ количествомъ, на которое *тяжесть* опуститъ движимое въ тоже время.

И такъ назвавъ V данную тѣлу скорость по AZ, или число футовъ, которое бы оно должно описывать единообразно въ каждую секунду по силѣ этой скорости, и представивъ чрезъ t число секундъ или частей секунды, которое оно должно употребить на прохожденіе изъ A въ какую нибудь точку N, получимъ (154) AN $=$ Vt.

Положимъ p за скорость тяжести въ одну секунду времени, и слѣд. $\frac{pt^2}{2}$ будетъ

означать въ такомъ случаѣ пространство, которое опишетъ тяжелое тѣло въ число t секундъ (174). И ежели М будетъ дѣйствительно та точка, куда тѣло приходитъ по истеченіи времени t, то $NM = \frac{1}{2}pt^2$.

Проведемъ чрезъ точку А вертикалъ АХ, и чрезъ точку М линею MQ параллельную съ тангенсомъ AZ; и назвавъ AQ, x', а $QM = AN$, y', будемъ имѣть $x' = \frac{1}{2}pt^2$, и $y' = Vt$. Естьли изъ послѣдняго уравненія выведемъ величину t, и вставимъ ее въ первомъ, то произойдетъ $x' = \frac{\frac{1}{2}py'^2}{V^2}$, или $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p} x' = y'^2$. Но $\frac{V^2}{2p}$ изображаетъ (176) высоту, съ которой тяжелое тѣло должно упасть для пріобрѣтенія скорости V; и потому назвавъ h эту высоту, будемъ имѣть $\frac{V^2}{2p} = h$, а $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p} = 4h$; слѣд. $4hx' = y'^2$. И такъ всякая точка М кривой линеи АМС имѣетъ такое свойство, что квадратъ ордонаты y' или QM параллельной съ тангенсомъ AZ, равняется произведенію абсциссы AQ на постоянную линею $4h$; слѣд. кривая линея АМС будетъ (*Алг.* 301) парабола, имѣющая діаметромъ

вертикалЪ AX, параметромЪ учетверенную высоту, приличную скорости брошеннаго тѣла, а уголЪ AQM, которой ордонаты составляютЪ сЪ діаметромЪ, дополненіе угла метанія ZAC. Слѣд. по извѣстнымЪ скорости и углу метанія не трудно начертить кривую линею по изъясненному способу (*Алг.* 302).

472. ОтнесемЪ теперь разныя точки этой линеи кЪ горизонту AC, и проведемЪ перпендикулярЪ MP на AC.

НазвавЪ AP, x; PM, y; a уголЪ метанія ZAC, получимЪ вЪ прямоугольномЪ треугольникѣ APN, $1 : AN = син.\ NAP : PN = кос.\ NAP : AP$; слѣд. $PN = Vt\ син.\ a$, и $AP = Vt\ кос.\ a$, а поелику $MN = \frac{1}{2}pt^2$, такЪ какЪ мы видѣли выше, то получимЪ $PM = Vt\ син.\ a - \frac{1}{2}pt^2$. Слѣд. $x = Vt\ кос.\ a$, и $y = Vt\ син.\ a - \frac{1}{2}pt^2$. Извлекши изЪ перваго уравненія величину t, и вставивЪ ее во второмЪ, получимЪ по вставкѣ вмѣсто $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}$ величину $4h$ и по приведеніи, $4hy\ кос.^2\ a = 4hx\ син.\ a\ кос.\ a - xx$ такое уравненіе, изЪ котораго можно вывести слѣдующія свойства.

473. Поелику данная тѣлу скорость имѣетЪ извѣстную мѣру, и потому верти-

кальное ея дѣйствіе должно истощиться отъ тяжести по прошествіи извѣстнаго времени; слѣд. долженъ быть такой предѣлъ, гдѣ тѣло перестанетъ восходить и начнетъ опускаться. А какъ горизонтальная скорость отъ того не перемѣнится, то тѣло достигнувъ самой высокой точки В, опишетъ вторую отрасль ВС той же кривой линеи, и встрѣтится снова съ горизонталомъ въ точкѣ С.

474. А чтобъ узнать разстояніе АС, которое называется *амплитудою* параболы, или широтою описаннаго тѣломъ пути, должно, какъ не трудно примѣтить, предположить $y = o$. Послѣ чего получимъ $4hx$ $син. a\ кос. a - xx = o$; отсюда выходитъ $x = o$, и $x = 4h\ син.\ a\ кос.\ a$. Первая величина x показываетъ точку А, а вторая точку лежащую на АС, для опредѣленія которой должно продолжить ХА на количество $AK = 4h$, опустить изъ точки K перпендикуляръ KL на AZ, и изъ точки L перпендикуляръ LC на AC; ибо АС въ такомъ случаѣ будетъ $= 4h\ син.\ a\ кос.\ a$.

И такъ знавши скорость и уголъ метанія, не трудно опредѣлить амплитуду. На примѣръ для параболы, которая описана тѣломъ, брошеннымъ со скоростью 150 футовъ въ секунду и подъ угломъ 36

градусовЪ; нахожу (176) высоту, приличную скорости 150 футовЪ $h = \frac{(150)^2}{2 \times 30,2} = 372$ф, 5; а какЪ синусЪ 36° равняется 0,5878, по предположенiи радiуса = 1, а косинусЪ = 0,809, то получаю АС = 4*h* *син. a* *кос. a* = 1490 × 0,5878 × 0,809 = 708 ф, 6; отсюда заключаю, что тѣло кинутое по такому условiю, должно упасть на разстоянiи 709 футовЪ.

475. Величина АС = 4*h* *син. a кос. a* отнюдЬ не перемѣнится, когда вмѣсто угла *a* поставишь дополненiе его кЬ 90°, потому что она, какЬ не трудно примѣтить, должна превратиться вЬ АС = 4*h* *кос. a син. a*. Но двѣ величины *a* и 90° — *a* имѣютЬ одинакую разность сЬ 45°; и потому *ядра, выстрѣленныя одинакими зарядами и подЪ углами, имѣющими одинакое склоненiе вЪ разсужденiи угла 45°, упадаютЪ на равныхЪ разстоянiяхЪ.*

476. ТажЬ величина АС = 4*h* *син. a кос. a* показываетЬ еще, что отЬ 0° до 45° выстрѣлы увеличиваются, а за 45° они уменьшаются; ибо не трудно примѣтить, что величины *a* перейдя за этотЬ предѣлЬ, становятся дополненiями предыдущихЬ. Слѣд. *изЪ всѣхЪ выстрѣловЪ, здѣланныхЪ одинакимЪ зарядомЪ, самой большой будетЪ тотЪ, которому дано направленiе подЪ угломЪ 45°.*

477. Поелику по предположеніи угла a 45°, синусЪ и косинусЪ его становятся порознь равны $\sqrt{\frac{1}{2}}$, и потому амплитуда превращается вЪ $AC = 4h \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = 4h \times \frac{1}{2} = 2h$. Слѣд. *самая большая амплитуда бываетЪ вдвое больше высоты, приличной скорости кинутаго тѣла.*

478. УпотребивЪ показанной (36) способЪ, можно вывести такой же результатЪ, какой (476). ВЪ сходственность (36) должно одифференціалить величину AC, принявЪ вЪ ней h постояннымЪ, а a перемѣннымЪ количествомЪ, и дифференціалЪ приравнять кЪ нулю. Слѣд. по объявленному (22 и 23) найдемЪ $4hda$ *кос*^{2} a — $4hda$ *син*^{2} $a = 0$; отсюда выходитЪ $\frac{син^2\, a}{кос^2\, a} = 1$, или *танг*^{2} $a = 1$; слѣд. *танг.* $a = 1$. И такЪ уголЪ, котораго тангенсЪ равенЪ радіусу, будетЪ искомой; но такой уголЪ (*Геом.* 276) есть 45°.

479. Естьли бы опредѣлено было сЪ довольною точностію, какую скорость способно дать извѣстному тѣлу извѣстное количество пороха; то безЪ всякаго труда можно бы опредѣлить амплитуду. Но за недостаткомЪ сего прибѣгаемЪ кЪ опыту, и онЪ при помощи предыдущихЪ правилЪ опредѣляетЪ ее для всѣхЪ выстрѣловЪ, здѣланныхЪ одинакою силою пороха.

Вѣ самомѣ дѣлѣ ежели здѣлавѣ выстрѣлѣ извѣстнымѣ количествомѣ пороха и подѣ извѣстнымѣ склоненіемѣ, вымѣряемѣ послѣ разстояніе или амплитуду его; то величина h будетѣ намѣ извѣстна. Ибо представивѣ выстрѣлѣ чрезѣ b', и уголѣ склоненія чрезѣ a', получимѣ $b' = 4h$ *син.* a' *кос.* a'; слѣд. $h = \frac{b'}{4 \text{ син. } a' \text{ кос. } a'}$; вставивѣ эту величину h вѣ AC, которую положимѣ $= b$, будемѣ имѣть $b = \frac{b' \text{ син. } a \text{ кос. } a}{\text{син. } a' \text{ кос. } a}$; отсюда выходитѣ $b : b' =$ *син.* a *кос.* $a =$ *син.* a' *кос.* a'; то есть, *выстрѣлы, здѣланные подѣ разными склоненіями, будутѣ содержаться между собою какѣ синусы склоненій, умноженные на косинусы ихѣ.*

480. По объявленному (*Геом.* 286) не трудно заключить, что *син.* a *кос.* $a =$ $\frac{1}{2}$ *син.* $2a$; слѣд. $b : b' =$ *син.* $2a$: *син.* $2a'$; то есть, *выстрѣлы содержатся между собою, какѣ синусы двойныхѣ угловѣ склоненія ихѣ.*

481. Выстрѣлѣ, сѣ которымѣ сравниваются всѣ прочіе, есть 45 градусовѣ; а какѣ вѣ этомѣ углѣ *син.* $2a = 1$; то по-

лучимъ $b : b' = 1 :$ *син.* $2a'$, и слѣд. $b' = b$ *син.* $2a$; то есть, *выстрѣлъ подъ всякимъ угломъ равняется выстрѣлу подъ угломъ 45°, умноженному на синусъ двойнаго угла склоненія.*

482. Проба пороху дѣлается обыкновенно подъ угломъ 45 градусовъ, и это не безъ причины, потому что одни только ошибки около этого числа градусовъ, въ мѣрѣ угловыхъ склоненій производятъ малѣйшее дѣйствіе на разстояніе выстрѣла. Ибо естьли въ уравненіи $b = 4h$ *син.* a *кос.* a допустивъ, что здѣлана въ величинѣ a ошибка на весьма малое количество da, захотимъ послѣ узнать, какая выдетъ ошибка въ выстрѣлѣ b; то стоитъ только одифференціалить это уравненіе, принявъ b и a перемѣнными, и мы получимъ $db = 4hda$ *кос*$^2 a - 4hda$ *син*$^2 a = 4hda$ (*кос*$^2 a$ — *син*$^2 a$). И слѣд. ошибка db тѣмъ менѣе будетъ, чѣмъ *син.* a будетъ болѣе сходствовать съ *кос.* a. Но *син.* a больше всѣхъ сходствуетъ съ *кос.* a подъ угломъ склоненія, которой ближе подходитъ къ 45°. Слѣд. самыя малѣйшія ошибки выходятъ при 45°.

483. Приступимъ теперь къ опредѣленію горизонтальныхъ выстрѣловъ. Положимъ,

что пушка AB (*фиг. 44*) поставлена такъ, что линея цѣли ея CD сходствуетъ съ горизонтомъ. Выстрѣленное ядро по направленію ABG оси должно описать параболу BLKF, которая пересѣчетъ продолженную линею цѣли въ двухъ точкахъ L и F, въ первой по близости орудія, а въ другой далѣе. Такимъ образомъ ядро, вылетѣвъ у точки B ниже линеи цѣли, подымется потомъ выше ея, и наконецъ опустившись опять, пересѣчетъ ее въ точкѣ F. И такъ надобно опредѣлить горизонтальное разстояніе DF, или вообразивъ горизонтальную линею BM и вертикальную FM, надобно опредѣлить BM.

Представимъ чрезъ a уголъ линеи цѣли съ осью, а чрезъ c разстояніе оси до D самой вышней точки фриза; и слѣд. по проведеніи перпендикуляра BN, получимъ DN $= c$ *син.* a, а BN $= c$ *кос.* a $=$ FM.

Уголъ GBM, которой представляетъ здѣсь уголъ склоненія или метанія, равняется углу BED, и слѣд. $= a$.

И такъ изъ уравненія кривой линеи BKF, найденнаго въ (472) $4hy$ *кос*^{2} $a = 4hx$ *син.* a *кос.* $a - xx$ явствуетъ, что для опредѣленія BM, надобно въ этомъ уравненіи

вставить вмѣсто y величину FM или c *кос.* a, и извлечь потомъ изъ новаго величину x. Слѣд. получимъ $4hc$ *кос*^{3}. $a = 4hx$ *син.* a *кос.* $a - xx$, изъ котораго выходитъ $x = 2h$ *син.* a *кос.* $a \pm \sqrt{(}4hh$ *син*^{2}. a *кос*^{2}. $a - 4hc$ *кос*^{3}. a). А какъ уголъ a есть весьма малъ, то почти не можетъ быть чувствительной разности между радіусомъ и синусомъ его; слѣд можно заключить, что $x = 2h$ *син.* $a \pm \sqrt{(}$ $4hh$ *син*^{2}. $a - 4ch$) $= 2h$ *син.* $a \pm$ $2h$ *син.* $a \sqrt{\left(1 - \frac{c}{h \text{ син}^2. a}\right)}$. Но h будетъ всегда оставаться весьма большимъ количествомъ въ разсужденіи измѣреній пушки; слѣд. количество $\frac{c}{h \text{ син. } a}$ можно почитать весьма малымъ, и слѣд. (*Алг.* 133) можно принимать за величину $\sqrt{\left(1 - \frac{c}{h \text{ син}^2. a}\right)}$ довольно близко къ ней подходящее количество $1 - \frac{c}{2h \text{ син}^2. a}$; послѣ такого допущенія получимъ $x = 2h$ *син.* $a \pm 2h$ *син.* a $\left(1 - \frac{c}{2h \text{ син}^2. a}\right)$, по которому опредѣлимъ двѣ слѣдующія величины x, $x = 4h$ *син.* $a - \frac{c}{\text{син. } a}$, и $x = \frac{c}{\text{син. } a}$; послѣдняя показываетъ

разстояніе BO, и первая разстояніе BM или горизонтальной выстрѣлъ.

Ежели вмѣсто h вставимъ величину его, найденную (477), то получимъ количество, изображающее горизонтальной выстрѣлъ, $x = 2b\ син.\ a - \frac{c}{син.\ a}$, b означаетъ выстрѣлъ подъ угломъ 45 градусовъ.

И такъ для полевой пушки 12, которая стрѣляетъ подъ угломъ 45° на разстояніе около 1800 туазовъ, и въ которой (Геом. 301) уголъ линеи цѣли съ осью $= 0°58'$, а $c = 44,926 = оф,4105 = 0^{т},0684$, будемъ имѣть $x = 3600 \times син.\ 0°\ 58' - \frac{0,0684}{син.\ 0°\ 58'} = 3600 \times 0,01687 - \frac{0,0684}{0,01687} =$ близу 57 туазовъ.

Этотъ горизонтальный выстрѣлъ весьма несходенъ съ тѣмъ, какой выходитъ на самомъ опытѣ, какъ тому и должно быть; ибо выстрѣлъ на 1800 туазовъ подъ угломъ 45°, употребляемый здѣсь для опредѣленія горизонтальнаго, гораздо меньше того, какой можетъ произойти въ пустотѣ, и слѣд. по такимъ слабымъ выстрѣламъ въ воздухѣ выводимъ совсѣмъ ложную выкладку для параболы. Мы не замедлимъ это доказать.

484. Изъ уравненія $4hy\ кос^2.\ a = 4hx\ син.\ a\ кос.\ a - xx$, которое заключаетъ въ себѣ четыре количества, можно по даннымъ

тремъ изъ нихъ вывести четыре разные вопроса; но мы займемся однимъ слѣдующимъ.

По извѣстнымъ силѣ пороха, горизонтальному разстоянію и вертикальной высотѣ цѣли, въ которую надобно попасть, опредѣлить склоненіе мортиры?

Положимъ, что M (*фиг.* 45) представляетъ данную цѣль. Вообразивъ перпендикуляръ MP, должно почитать разстояніе AP и уголъ MAP извѣстными. Допустимъ уголъ MAP $= b$, а разстояніе AP $= c$; послѣ чего MP $= \frac{c \times \text{син. } b}{\text{кос. } b}$. Слѣд. для точки M, $x = c$ и $y = \frac{c \times \text{син. } b}{\text{кос. } b}$. Вставивъ эти величины въ уравненіи опредѣленномъ въ x и y, будемъ имѣть $4h$ син. b кос.^{2} $a = 4h$ син. a кос. a кос. $b -$ c кос. b; но (*Геом.* 287) выходитъ кос. $2a =$ кос. a кос. $a -$ син. a син. $a =$ кос.^{2} $a -$ син.^{2} $a =$ кос. $2a - 1 +$ кос.^{2} $a = 2$ кос.^{2} $a - 1$; слѣд. кос.^{2} $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ кос. $2a$. И (*Геом.* 286) син. $2a =$ син. a кос. $a +$ син. a кос. $a = 2$ син. a кос. a; слѣд. син. a кос. $a = \frac{1}{2}$ син $2a$.

Вставивъ эти величины, получимъ $2h$ син. $b + 2h$ син. b кос. $2a = 2h$ син. $2a$

кос. b — c *кос.* b, или $2h$ *син.* $2a$ *кос.* b — $2h$ *син.* b *кос.* $2a$ = $2h$ *син.* b + c *кос.* b, или (*Геом.* 286) $2h$ *син.* $(2a - b)$ = $2h$ *син.* b + c *кос.* b; и слѣдовательно наконецъ

$$\frac{2h}{кос.\ b}\ син.\ (2a - b) = \frac{2h\ син.\ b}{кос.\ b} + c$$

уравненіе, по которому сдѣлай такой чертежъ.

Поставивъ на AM неопредѣленный перпендикуляръ AE, изъ середины D линеи AK = $4h$ проведи на AK перпендикуляръ DE, пересѣкающей AE въ точкѣ E; изъ этой точки E какъ изъ центра и радіусомъ EA опиши дугу ANN′K, и продолживъ PM, пока она пересѣчетъ эту дугу въ точкахъ N и N′, проведи ANZ, AN′Z′; этѣ линеи будутъ два направленія, по которымъ пущенная бомба со скоростью приличною высотѣ h, можетъ одинаково попасть въ точку M.

Ибо не трудно примѣтить, что уголъ EAD прямоугольнаго треугольника ADE равенъ MAP. А поелику AD = $2h$, то получимъ ED = $\frac{2h\ син.\ b}{кос.\ b}$; при томъ же AP = c,

слѣд. ED + AP или EI = $\frac{2h\ син.\ b}{кос.\ b} + c$,

и слѣд. $\frac{2h \text{ син. } (2a - b)}{\text{кос. } b}$ = EI. Но въ томъ же треугольникѣ ADE, AE $= \frac{2h}{\text{кос. } b}$; слѣд. AE *син.* $(2a - b)$ = EI.

Продолжимъ дугу KNA, пока она пересѣчетъ вертикалъ GE въ точкѣ G, и проведемъ перпендикуляры NL, N′L′. Въ треугольникѣ NEL выходитъ NE : NL или AE : EI = 1 : *син.* NEG; слѣд. AE × *син.* NEG = EI; отсюда получаемъ *син.* $(2a - b)$ = *син.* NEG, и $2a - b$ = NEG = NEA + b; слѣд. $a = \frac{1}{2}$NEA + b. А поелику уголъ NAM имѣетъ верхъ свой при окружности, и AM есть тангенсъ, то NAM = $\frac{1}{2}$NEA; при томъ же уголъ MAP = b, слѣд. a = NAM + MAP = NAP; и слѣд. точка N рѣшитъ вопросъ.

Такимъ же образомъ докажемъ, что и точка N′ будетъ рѣшить его; ибо въ треугольникѣ N′EL′ получаемъ N′E : N′L′ или AE : EI = 1 : *син.* N′EL′ или 1 : *син.* N′EG; слѣд. AE × *син.* N′EG = EI; отсюда выходитъ *син.* $(2a - b)$ = *син.* N′EG, и $2a - b$ = N′EG = N′EA + b; слѣд $a = \frac{1}{2}$ N′EA + b = N′AM + MAP = N′AP.

Ежели цѣль будетъ находиться ниже горизонта батареи, то количество b должно здѣлать отрицательнымъ.

485. И такъ однимъ зарядомъ можно попасть въ туже цѣль по двумъ разнымъ направленiямъ, лишь бы AP не превосходило DR. Направленiе AN′ бываетъ выгоднѣе для разрушенiя строенiй или крѣпостей; когда же надобно, чтобъ ядро испровергнувъ зданiе, могло еще поднявшись опустошить и близъ лежащiя мѣста, дѣлая рикошеты, то въ такомъ случаѣ преимущественнѣе употребляется направленiе AN.

486. Опредѣлимъ теперь время, употребляемое тѣломъ на достиженiе цѣли.

Изъ уравненiя $x = Vt$ *кос.* a выводимъ весьма простое выраженiе $t = \frac{x}{V \text{ кос. } a}$.

Вставивъ въ этомъ выраженiи вмѣсто x величину его c, и вмѣсто V величину $\sqrt{(2ph)}$, получимъ $t = \frac{c}{\text{кос. } a \sqrt{(2ph)}}$. Но мы видѣли выше, какъ опредѣляется h на опытѣ, и притомъ извѣстно, что $p = 30Ф, 2$.

487. Наконецъ ежели пожелаемъ узнать самую большую высоту DB (*фиг. 43*), на которую можетъ подняться брошенное тѣло; то должно замѣтить, что по предположеніи DB *maximum*, дифференціалъ его долженъ здѣлаться (36) равнымъ нулю. И такъ одифференціаливъ уравненіе $4hy$ *кос*^{2}. $a = 4hx$ *син*. a *кос*. $a - xx$, принимая одни только y и x перемѣнными, должно приравнять dy къ нулю; въ сходственность чего получимъ $4hdx$ *син*. a *кос*. $a - 2xdx = o$; отсюда выходитъ $x = 2h$ *син*. a *кос*. a. По вставкѣ этой величины x въ уравненіи, будемъ имѣть $y = h$ *син*^{2}. a = BD. Посудимъ о *рикошетахъ*.

488. *Рикошетъ* есть такое движеніе брошеннаго тѣла, которое повстрѣчавшись съ какимъ нибудь препятствіемъ, отскакиваетъ отъ него и начинаетъ опять дѣлать подобное прежнему движеніе. Чѣмъ менѣе будетъ уголъ направленія, по которому пущено тѣло, съ горизонтомъ, тѣмъ оно способнѣе (при всѣхъ впрочемъ равныхъ вещахъ) здѣлаетъ рикошетъ; потому что въ такомъ случаѣ сила, бросившая тѣло, дѣйствуетъ почти въ параллель съ горизонтомъ; и слѣд. сопротивленіе воздуха и всякаго другаго препятствія должно употребить на истребленіе ея гораздо болѣе времени. Ежели брошенное

тѣло будетъ не упругое, и ежели поверхность, на которую оно упадетъ, будетъ горизонтальна и безъ гибкости, то тѣло не можетъ здѣлать рикошета; ибо скорость его, достигшаго въ C (*фиг.* 46) по какому нибудь направленію MC, раздѣлится на двѣ другія, изъ которыхъ одна QC будетъ перпендикулярна къ поверхности, и слѣд. должна безъ всякаго возстановленія уничтожиться, потому что тѣло не имѣетъ упругости; а другая скорость PC останется, въ силу которой тѣло, по исключеніи сопротивленія воздуха и тренія, должно покатиться по CZ.

489. Но ежели при точкѣ C (*фиг.* 47), гдѣ тѣло повстрѣчается съ поверхностью, случится нѣкоторое возвышеніе CE; то движеніе по MC раздѣлится на движеніе QC перпендикулярное къ поверхности CE и на PC, имѣющее направленіе вдоль той же поверхности; по этому направленію PE тѣло продолжая путь свой, опишетъ новую кривую линею такого же свойства, какъ бы оно было пущено изъ точки C по направленію CE; оно подымется на извѣстную высоту и опустится въ другой точкѣ I, гдѣ опять возобновитъ подобное движеніе, естьли обстоятельства случатся тѣже.

490. И такъ изъясненный нами теперь рикошетъ зависитъ отъ положенія препятствія, съ которымъ встрѣчается тѣло. Но ежели это препятствіе будетъ имѣть гибкость или подвижность, свойственныя на примѣръ землѣ, водѣ и проч., то рикошетъ можетъ произойти и на самой горизонтальной поверхности. Ибо движимое по силѣ вертикальной скорости QC (*фиг. 48*) будетъ съ большимъ или меньшимъ стремленіемъ углубляться въ землю, глядя по свойству препятствія, а по скорости PC оно будетъ драть ее и здѣлаетъ борозду, которой глубина увеличивается до тѣхъ поръ, пока вертикальная скорость QC совсѣмъ не истощится. Тогда по силѣ оставшейся горизонтальной скорости оно будетъ извергать предъ собою противящуюся матерію, и здѣлаетъ себѣ проходъ къ сторонѣ, гдѣ менѣе найдетъ сопротивленія; въ этомъ изверженіи жолубъ борозды становится для движимаго тѣмъ же, чѣмъ была для него поверхность CE (*фиг. 47*) въ предыдущемъ случаѣ. А какъ тѣмъ способнѣе тѣло можетъ вытти наружу (при всѣхъ впрочемъ равныхъ вещахъ), чѣмъ менѣе будетъ глубина борозды; и поелику эта глубина зависитъ отъ вертикальной скорости QC, которая при маломъ углѣ MCP и сама будетъ не такъ велика, то должно заклю-

чить, что рикошетные выстрѣлы удобнѣе бываютъ подъ малыми углами метанія.

491. Рикошетъ зависитъ также не мало и отъ фигуры брошеннаго тѣла. На примѣръ естьли надобно здѣлать рикошетъ по водѣ тѣломъ сферической фигуры, то должно скорость MC здѣлать такою, чтобъ вертикальная скорость QC могла истребиться прежде, чѣмъ вертикальной діаметръ тѣла совсѣмъ погрузится въ воду. Какъ же скоро онъ совсѣмъ погрузится, то сопротивленіе воды будетъ дѣйствовать въ такомъ случаѣ съ обѣихъ сторонъ равно на направленіе движимаго; и слѣд. одна только тяжесть способна перемѣнить оное, но тяжесть сама противится рикошету.

492. Поелику погруженіе дѣлается постепенно, то надобно замѣтить, что въ продолженіе его центръ тѣла описываетъ кривую линею, потому что направленіе сопротивленія перемѣняется непрестанно. На примѣръ, ежели въ то время, какъ центръ C (*фиг. 49*) описавъ какую нибудь стезю PC, будетъ потомъ стремиться къ движенію по продолженію CI того же направленія, вообразимъ два тангенса BR, DS параллельные съ этимъ направленіемъ, то найдемъ;

что сопротивленіе будетъ дѣйствовать на одну только часть BVL; и ежели тѣло будетъ сферической фигуры, то составное сопротивленіе CK изъ всѣхъ дѣйствующихъ на разныя точки BVL, получитъ такое направленіе, которое будетъ силиться поднять тѣло выше CI. И такъ вообразивъ параллелограммъ CIEK, получимъ въ CE направленіе, которое возьметъ тѣло на одно мгновеніе вмѣсто CI, разумѣется по исключеніи тяжести.

493. Наконецъ ежели движимое и препятствіе будутъ гибкаго или упругаго вещества, то эти обстоятельства могутъ опять способствовать рикошету. А чтобъ доказать на самомъ дѣлѣ, то возьмемъ самой простой примѣръ и положимъ, что одно только движимое имѣетъ гибкость и совершенную угругость, и здѣлаемъ притомъ для большей ясности исключеніе тяжести. Натурально, что въ минуту, когда брошенное тѣло по направленію AC (*фиг. 50*) коснется до поверхности, скорость его должна раздѣлиться на одну горизонтальную QC, которая останется безъ всякой перемѣны, естьли не будетъ допущено ни треніе, ни сопротивленіе со стороны середины, въ которой будетъ находиться тѣло. Чтожъ принадлежитъ до

перпендикулярной или вертикальной скорости PC, то она должна только здавить тѣло; а поелику эта скорость погасаетъ постепенно, а горизонтальная остается еще въ своей силѣ; и потому надобно заключить, что центръ C будетъ приближаться къ плоскости HZ по степенямъ умаляющимся, и напротивъ подаваться впередъ параллельно съ HZ одинаково. Въ сходственность чего есть-ли вообразимъ въ каждое мгновеніе новый параллелограммъ такой, котораго бы горизонтальной бокъ содержался къ вертикальному, какъ горизонтальная скорость къ остальной вертикальной; то діагональ сего параллелограмма, долженствующая изобразить въ каждое мгновеніе дорогу центра, будетъ всегда различна, такъ что центръ C приближится къ HZ, описывая кривую линею во время сжатія тѣла, Когдажъ сгнетеніе кончится, то центръ C будетъ двигаться на одно мгновеніе потангенсу параллельному съ HZ; послѣ чего отпущенная упругость возвратитъ тѣлу степени прежней его скорости, по которымъ центръ будетъ стремиться удаляться отъ плоскости такимъ же образомъ, какъ онъ приближался къ нему во время сжатія, и опишетъ вторую отрасль RO совершенно равную первой RC. Наконецъ по пришествіи въ точку O, удаленную отъ HZ на количе-

ство равное радіусу IC, будетъ двигаться по тангенсу OT одинаково расположенному съ AC; то есть, косое удареніе упругаго тѣла о плоскость, не имѣющую никакой гибкости, производится такъ, что (по исключеніи тяжести) уголъ отраженія бываетъ всегда равенъ углу паденія; каждой изъ сихъ угловъ измѣряется тѣмъ, которой составляютъ съ горизонтальною плоскостью тангенсы при концахъ C и O кривой линеи, которую центръ описываетъ во время сгнетенія и возстановленія упругости; эта кривая линея тѣмъ меньше бываетъ, чѣмъ сжатіе и возстановленіе будутъ мгновеннѣе.

494. Когдажъ примемъ въ разсужденіе и тяжесть, то тѣло брошенное по направленію BD описавъ часть DC параболы, которой AC служитъ тангенсомъ, коснется плоскости; оттуда по окончаніи сгнетенія оно опишетъ другую часть OS параболы, совершенно равную первой и одинаково расположенную съ нею.

495. Треніе также способствуетъ рикошету, потому что оно сообщаетъ тѣлу коловратное движеніе, и слѣд. посредствомъ сего движенія оно легче преодолѣваетъ препятствія. Въ этомъ мы увѣримся больше,

когда будемъ говорить о треніи. Таковы суть главныя причины и обстоятельства рикошетныхъ выстрѣловъ.

Чтожъ принадлежитъ до свойства кривой линеи, которую описываетъ брошенное тѣло при переходѣ изъ одной середины въ другую; то чтобъ опредѣлить ее, равно какъ и содержаніе угла паденія съ угломъ отраженія, надобно для этого знать законъ сопротивленія средины, въ которую погружается тѣло. Но кромѣ жидкостей мы не знаемъ его для другихъ веществъ; а какъ и тутъ уравненія, которыя бы могли служить къ опредѣленію такого рода движенія, не такъ способно интегралятся по извѣстнымъ намъ способамъ, то мы и не намѣрены трактовать объ этой матеріи со всею строгостію.

О Движеніи тѣлъ въ противящихся серединахъ.

496. Теперь только мы видѣли, что брошенныя тѣла описываютъ въ серединѣ, не дѣлающей никакого сопротивленія, кривую линею параболу; и притомъ замѣтили, что по одному выстрѣлу, здѣланному подъ извѣстнымъ угломъ, можно опредѣлять всякой

другой зделанной подЪ какимЪ нибудь другимЪ склоненіемЪ.

Но этого не можно утвердить, когда середина будетЪ ощутительно противиться; кривая линея вЪ такомЪ случаѣ становится сложнѣе, и слѣд. труднѣе опредѣлять выстрѣлы одни по другимЪ.

497. Хотя воздухЪ около 850 разЪ рѣже воды, и потому казалось бы не долженЪ зделать великаго сопротивленія при движеніи бросаемыхЪ тѣлЪ; однакожЪ чрезвычайная скорость, сЪ которою стремятся ядра, пускаемыя изЪ артиллерійскихЪ орудій, не позволяетЪ сумнѣваться, чтобЪ сопротивленіе не могло имѣть чувствительнаго содержанія сЪ вѣсомЪ бросаемыхЪ тѣлЪ; и слѣд. необходимо должно обращать на него вниманіе, когда по извѣстному выстрѣлу хотимЪ опредѣлить другой подЪ другимЪ склоненіемЪ орудія.

498. Прежде нежели будемЪ судить о теоріи, относящейся до сего пункта, посмотримЪ, чему научаетЪ насЪ опытЪ вЪ разсужденіи сего сопротивленія.

ОПЫТЫ, чинимые въ ла Ферѣ Іюня 1740 года надъ пушкою 24, по 9 фунтовому заряду пороха.

УГЛЫ метанія или склоненія.	Замѣченные выстрѣлы	Каковы бы должны быть выстрѣлы въ пустотѣ, принявъ выстрѣлъ подъ 15 град. извѣстнымъ.
градусы.	тоазы.	тоазы.
4	820	467
15	1675	1675
20	1740	2153
25	1825	2566
30	1910	2901
35	2020	3148
40	2050	3300
45	2200	3350

Третья колонна этой таблицы основывается на формулѣ $b = 4h$ *син.* a *кос.* $a = 2h$ *син.* $2a$ (475 и 480). Положивъ $a = 15°$, и $b = 1675$, получимъ $h = 1675$. Послѣ чего формула превратится въ $b = 3350$ *син.* $2a$.

Наконецъ положивъ попеременно $a = 20°$, $a = 25°$ и проч., найдемъ по выкладкѣ числа, означенныя въ третьей колоннѣ.

По сравненіи второй колонны съ третьею, примѣчаемъ ощутительно великое сопротивленіе отъ воздуха. Ибо 1) принимая выстрѣлъ подъ угломъ

15 градусовъ такимъ, которой здѣланъ въ пустотѣ, должно допустить силу пороха гораздо меньше и слабѣе той, какая бы дѣйствительно вышла, потому что надобно больше силы для выстрѣла на 1675 тоазовъ въ противящейся серединѣ, чѣмъ въ пустой. Отсюда слѣдуетъ, что заключая о выстрѣлѣ подъ угломъ 4 градусовъ по углу 15°, найдемъ его не только меньше того, которой бы долженъ произойти въ той же пустотѣ по настоящей силѣ пороха, но и еще онъ будетъ меньше выстрѣла, здѣланнаго въ противящейся серединѣ, когда ошибка въ разсужденіи силы пороха будетъ по положенію очень велика; въ этомъ увѣряемся еще больше на самомъ дѣлѣ: ибо выстрѣлъ подъ 4° найденъ въ пустотѣ только что 467 туазовъ, а въ противящейся серединѣ 820 туазовъ.

2. Хотя нѣтъ сумнѣнія, что сила пороха должна быть гораздо слабѣе настоящей, допуская выстрѣлъ подъ 15° здѣланнымъ въ пустотѣ; однакожъ по сравненію прочихъ выстрѣловъ замѣчаемъ, что воздушное сопротивленіе весьма перемѣнило ихъ: ибо третья колонна показываетъ, что наблюденные выстрѣлы должны выти гораздо больше. И слѣд. нѣтъ сомнѣнія, что въ большихъ зарядахъ пороха сопротивленіе измѣняетъ такъ выстрѣлы, что не можно, не подвергаясь ошибкѣ, заключить объ однихъ выстрѣлахъ по другимъ, когда станемъ держаться обыкновеннаго гипотезу, что кривая линея, описываемая тѣлами, состоитъ всегда изъ параболы.

499. Посмотримъ же теперь, какимъ образомъ теорія приводитъ насъ въ состояніе заключать по извѣстному выстрѣлу о

всякомъ другомъ подъ даннымъ склоненіемъ орудія.

Вообразимъ, что AEC (*фиг.* 51) есть искомая кривая линея, и допустимъ, что движимое описало въ мгновеніе дугу безконечно малую Mm. Безъ дѣйствія сопротивленія и тяжести оно стало бы описывать въ послѣдующую минуту линею mq, находящуюся на продолженіи Mm. Допустимъ также, что во время сего мгновенія сопротивленіе здѣлаетъ ему замедленіе въ движеніи на количество qn, и что по силѣ тяжести оно опустится на количество nm'; слѣд. точка m' будетъ то мѣсто, куда оно придетъ во второе мгновеніе.

Проведемъ qr параллельно съ вертикаломъ MP, и ns параллельно съ горизонталомъ AC. Назовемъ AP, x; PM, y; дугу AM, s; и положимъ, что R и p означаютъ сопротивленіе и тяжесть движимаго въ жидкости, то есть, тѣ скорости, которыя сообщатъ ему эти силы въ секунду времени, когда бы онѣ дѣйствовали равно въ каждое мгновеніе во все продолженіе минуты. И такъ Rdt и pdt будутъ изображать скорости, происходящія отъ сопротивленія и тяжести въ одно мгновеніе (163).

Допустимъ уменьшеніе скорости, происходящее отъ сопротивленія и представленное чрезъ qn, раздѣленнымъ на два другія, на одно qs вертикальное, а другое qo горизонтальное; и мы получимъ $nq : sq = Rdt$ къ уменьшенію скорости, причиняемому сопротивленіемъ въ вертикальномъ направленіи; получимъ также $nq : sn = Rdt$ къ уменьшенію скорости въ горизонтальномъ положеніи. Но по проведеніи Mt параллельной съ AC, выходитъ $nq : sq : sn = Mm : mt : Mt = ds : dy : dx$; слѣд. уменьшеніе скорости по qs будетъ $\frac{Rdydt}{ds}$, а по sn будетъ $\frac{Rdxdt}{ds}$. Естьли къ первой величинѣ придадимъ дѣйствіе тяжести pdt, то получимъ въ $\frac{Rdydt}{ds} + pdt$ и $\frac{Rdxdt}{ds}$ уменьшеніе скорости какъ въ вертикальномъ, такъ и горизонтальномъ положеніи.

Но тѣло описывая Mm, подается впередъ параллельно съ PM на количество tm или dy, а параллелѣно съ AP на количество Mt или dx. Слѣд. скорость его параллельно съ PM будетъ $\frac{dy}{dt}$, а параллель-

но съ AP она будетъ $\frac{dx}{dt}$. И такъ по описаніи mm' сіи скорости превратятся въ $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, и $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, когда онѣ будутъ увеличиваться; слѣд. $-d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ и $-d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ изобразятъ уменьшеніе этихъ скоростей. Въ сходственность чего получимъ $\frac{Rdydt}{ds} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, и $\frac{Rdxdt}{ds} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Вотъ два уравненія, которыхъ интегралы должны опредѣлить движеніе и кривую линею. Здѣлаемъ изъ нихъ нѣкоторое употребленіе.

500. Естьли не будетъ никакого сопротивленія, то получимъ въ такомъ случаѣ $pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, и $o = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, которыхъ интегралы выходятъ $pt = C - \frac{dy}{dt}$, и $C' = \frac{dx}{dt}$.

Для опредѣленія сихъ двухъ постоянныхъ, положимъ, что AZ представляетъ линею бросанія, и допустимъ уголъ ZAC $=$ *a*, а скорость метанія $=$ V; послѣ чего въ V *кос. a* будемъ имѣть начальную горизонтальную скорость, а въ V *син. a* начальную вертикальную. Слѣд. постоянныя количества C и C′ должны быть таковы, что по допущеніи $t = o$, $\frac{dx}{dt}$ будетъ $=$ V *кос. a* и $\frac{dy}{dt} =$ V *син. a*. И такъ $o =$ C $-$ V *син. a.* и C′ $=$ V *кос. a.* Слѣд. $pt =$ V *син. a* $-$ $\frac{dy}{dt}$, а V *кос. a* $= \frac{dx}{dt}$. Обынтеграливъ снова эти уравненія, получимъ $y =$ Vt *син a* $- \frac{1}{2}pt^2$, и $x =$ Vt *кос. a*; мы не прибавляемъ къ этимъ интеграламъ новыхъ постоянныхъ, потому что x и y уничтожаются, когда $t = o$. Естьли вставимъ въ первомъ уравненіи величину t, выведенную изъ втораго, то получимъ $y = \frac{x \text{ син. } a}{\text{кос. } a} - \frac{\frac{1}{2}px^2}{V^2 \text{ кос}^2. a}$, или назвавъ *h* приличную высоту скорости V, будемъ имѣть $y = \frac{x \text{ син. } a}{\text{кос. } a} - \frac{x^2}{4h \text{ кос}^2. a}$,

такое же уравненіе, какое найдено было (472) для подобнаго случая.

501. Допустимъ теперь сопротивленіе пропорціональнымъ квадрату скорости, что (375) принято за законъ сопротивленія жидкостей.

И такъ по объявленному (382) получимъ въ $nDSu^2dt$ количество движенія, которое истребляется сопротивленіемъ въ мгновеніе dt; и слѣдовательно представивъ чрезъ M массу брошеннаго тѣла, будемъ имѣть въ $\frac{nDSu^2dt}{M}$ скорость, которой масса лишится въ мгновеніе, или величину количества, представленнаго нами выше чрезъ Rdt; слѣд. $R = \frac{nDSu^2}{M}$; здѣлавъ $\frac{nDS}{M} = \frac{p}{k^2}$ и вставивъ вмѣсто u величину $\frac{ds}{dt}$, будемъ имѣть $R = \frac{p}{k^2} \times \frac{ds^2}{dt^2}$.

Послѣ сего два генеральныя уравненія (499) превращаются въ $\frac{pdyds}{k^2dt} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, и $\frac{pdxds}{k^2dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Для большей легкости допустимъ dt постояннымъ, отъ чего выходитъ $\frac{pdyds}{k^2} + pdt^2 = - ddy$ и $\frac{pdxds}{k^2} = - ddx$.

Вставивъ въ первомъ уравненіи величину количества ds, выведенную изъ втораго, получимъ $- \frac{dyddx}{dx} + pdt^2 = - ddy$, или $pdt^2 = \frac{dyddx - dxddy}{dx} = - dx \times d\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Но по умноженіи уравненія $\frac{pdxds}{k^2} = - ddx$ на k^2dt^2, выходитъ $pdxdsdt^2 = - k^2dt^2ddx$. Вставивъ вмѣсто pdt^2 величину его $- dx \times d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, получимъ $- dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) ds = - k^2dt^2ddx$. А какъ $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, то получимъ наконецъ $dx^3 d\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = k^2\, dt^2 \times \frac{ddx}{dx^3}$ такое уравненіе, коего интегралъ покажетъ кривую линею, которую описываетъ брошенное тѣло.

502. А поелику dt есть постоянное, то не трудно найти интегралъ для второй части; и этотъ интегралъ будетъ $-\frac{k^2\,dt^2}{k\,dx^2}$. Посмотримъ, какъ должно интегралить первую часть.

503. Замѣтимъ, что $\frac{dy}{dx}$ изображаетъ тангенсъ угла, которой составляетъ кривая линея въ каждой точкѣ съ горизоатомъ. Здѣлаемъ $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1 - zz}$, z будетъ означать тангенсъ половины сего угла. Ибо допустивъ a угломъ, будемъ имѣть по изъясненному (*Геом.* 280) *син.* $2a$ = 2*син.* a *кос.* a, и *кос.* $2a$ = *кос.*^{2} a − *син.*^{2} a; слѣд. $\frac{\text{син.}^2 a}{\text{кос.}^2 a}$ или *танг.* $2a = \frac{2\,\text{син.}\,a\;\text{кос.}\,a}{\text{кос.}^2 a - \text{син.}^2 a}$.. или наконецъ по раздѣленіи на *кос.*^{2} a,

$$\text{танг. } 2a = \frac{\frac{2\,\text{син.}\,a}{\text{кос.}\,a}}{1 - \frac{\text{син.}^2\,a}{\text{кос.}^2\,a}} = \frac{2\,\text{танг.}\,a}{1 - \text{танг.}^2\,a}.$$

504. Естьли по предположеніи сего сдѣлаемъ въ самомъ дѣлѣ $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1 + zz}$, то

получимъ $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2(1+zz)}{(1-zz)^2}dz$; и

$$\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{4z^2}{(1-zz)^2}\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+2z^2+z^4}{(1-zz)^2}\right)} = \frac{1+zz}{1-zz}.$$

И такъ уравненіе превратится въ . . . $\frac{2(1+zz)^2}{(1-zz)^3}dz = k^2dt^2\frac{ddx}{dx^3}$. Но по показанному (103) способу интегралъ первой части будетъ $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \int\frac{dz}{1-zz}$, и это не трудно повѣрить по самой дифференціаціи.

При томъ же по обЪявленному (108 и 111) найдемъ, что $\int\frac{dz}{1-zz} = \ldots\ldots$ $\frac{1}{2}$ лог. $\frac{1+z}{1-z}$; и слѣд. будемъ имѣть . . .

$$\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{лог.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = C - \frac{k^2dt^2}{2dx^2}.$$

505. Опредѣлимъ сначала постоянное C. Назовемъ I уголъ метанія; и потому

получимъ при точкѣ бросанія $ds : dx = 1 :$ *кос.* I ; слѣд. $dx = ds$ *кос.* I, а $dx^2 = ds^2$ *кос.*^{2} I.

Положивъ V за скорость бросанія, будемъ имѣть при точкѣ бросанія $ds = Vdt$. Отсюда выведемъ $dx^2 = V^2 dt^2$ *кос.*^{2} I, и слѣд. $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{V^2 \text{ кос.}^2 \text{ I}}$. Принявъ h за высоту, съ которой бы пущенное тѣло должно упасть въ пустотѣ для пріобрѣтенія скорости V, по силѣ своей тяжести, которую оно имѣетъ въ воздухѣ, получимъ $V^2 = 2ph$ (176). Слѣд. $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{1}{4ph \text{ кос.}^2 \text{ I}}$. Вставивъ эту величину въ уравненіи $\frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} + \ldots$ $\frac{1}{2}$ *лог.*$\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$ и проч., и допустивъ *танг.* $\frac{1}{2}$ I $= z$, выведемъ $\frac{\text{танг.} \frac{1}{2} \text{I} + \text{танг.}^3 \frac{1}{2} \text{I}}{(1 - \text{танг.}^2 \frac{1}{2} \text{I})^2}$ $+ \frac{1}{2}$ *лог.* $\frac{1 + \text{танг.} \frac{1}{2} \text{I}}{1 - \text{танг.} \frac{1}{2} \text{I}} = C - \frac{k^2}{4ph \text{ кос.}^2 \text{ I}}$ такое уравненіе, по которому опредѣлится величина C.

506. Возвратимся теперь къ интегралу, и вставимъ въ немъ вмѣсто dt^2 величину его, выведенную изъ уравненія $pdt^2 = \ldots\ldots$ $- dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)$, которое по причинѣ $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1-zz}$ превращается въ $pdt^2 = - dx \times d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$. Послѣ чего получимъ $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \ldots$ $\frac{1}{2}$ лог.$\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = C + \frac{k^2\, d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{2\, pdx}$; отсюда выходитъ $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} - \frac{1}{2}\,\text{лог.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$.

Вотъ уравненіе, которое нужно обънинтегралить для опредѣленія кривой линеи, описанной брошеннымъ тѣломъ въ противящейся серединѣ, которой плотность будетъ постоянная.

507. По извѣстнымъ доселѣ преподаннымъ правиламъ не можно вообще интегралить этого уравненія. Хотя же обыкновенный способъ интегралить чрезъ приближеніе и можно употребить здѣсь, но онъ не такъ

будетъ выгоденъ, и годится тогда только, когда скорость будетъ не велика. Но когда скорость будетъ очень мала, тогда количество C становится весьма велико; и слѣд. въ такомъ случаѣ можно опустить всю перемѣнную часть знаменателя, отъ чего уравненіе превратится въ $\frac{2pdx}{k^2} = -\frac{1}{C} \times d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$.

По такому же предположенію величина C превращается въ $C = \frac{k^2}{4ph\ кос^2. I}$ и мы получаемъ $dx = -2h\ кос^2. I \times d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$, котораго интеграломъ будетъ $x = C' - 2h\ кос^2. I \times \frac{2z}{1-zz}$. Но по допущеніи $\frac{2z}{1-zz}$ или $\frac{dy}{dx} = танг. I$, должно выттти $x = o$; слѣд. $o = C' - 2h\ кос^2. I \times танг. I$, и $C' = 2h\ син. I\ кос. I$; слѣд. $x = 2h\ син. I\ кос. I - 2h\ кос^2. I \times \frac{2z}{1-zz} = 2h\ син. I\ кос. I - \frac{2hdy}{dx} \times кос^2. I$; отсюда выходитъ $\frac{x^2}{2} = 2hx\ син. I\ кос. I - 2hy\ кос^2. I$, и слѣд. $4hy\ кос^2. I = 4hx$

син. I *кос.* I — xx будетъ такое же уравненіе, какое найдено (472) для пустоты; и такъ при малѣйшей скорости кривая линея остается такая же парабола, какая и въ пустотѣ.

508. Когда же скорость будетъ и не очень мала, но такого свойства, по которому выходитъ C весьма велико въ разсужденіи самой большой величины $\frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} + \frac{1}{2}$ *лог.* $\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$; тогда можно интегралить по приближенію, раздѣливъ (*Алг.* 135) числителя $- d\left(\frac{2z}{1 - zz}\right)$ на знаменателя . . . .

$C - \frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} - \frac{1}{2}$ *лог.* $\frac{1 + z}{1 - z}$, принимая это послѣднее количество двучленнымъ, имѣющимъ C первымъ членомъ. Послѣ чего представивъ $\frac{2z}{1 - zz}$, $\frac{z + z^3}{(1 - zz)^2}$ и *лог.* $\frac{1 + z}{1 - z}$ строкою, выведемъ для величины $\frac{2pdx}{k^2}$ рядъ одночленныхъ количествъ, которыя не трудно интегралить и которыхъ строка тѣмъ *сближительнѣе* будетъ, чѣмъ C будетъ больше. Но мы неостановимся на этомъ приближеніи,

потому что оно годится въ нѣкоторыхъ только случаяхъ; при томъ же и самые эти случаи можно подчинить слѣдующему другому приближенію.

509. Представимъ сначала строкою количество $\frac{1}{2}$ *лог.* $\frac{1+z}{1-z}$. Получимъ (37)

$$\frac{1}{2}\ лог.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{11}}{11}\ \text{и}$$

проч. Умноживъ эту строку на $(1 - zz)^2$ и произведенiе прибавивъ къ числителю . . . $\frac{z + z^3}{(1 - zz)^2}$, будемъ имѣть . . . . . .

$$\frac{2z - 2z^3 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{8}{15}z^5 + \frac{8}{105}z^7 + \frac{8}{315}z^9 + \frac{8}{693}z^{11}\ \text{и проч.}}{(1 - zz)^2}$$

И такъ выведенное уравненiе превратится въ

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-\,d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z - 2z^3 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{8}{15}z^5\ \text{и пр.}}{(1-zz)^2}}$$

которое можно привести въ $\frac{2pdx}{k^2} = \ldots$

$$\frac{-\,d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}\left(1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 + \frac{4}{105}z^6 + \text{и проч.}}{1-zz}\right)}$$

510. По допущеніи сего, естьли бы количество $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 \text{ и проч.}}{1 - zz}$ было постоянное, или естьли бы не опасаясь здѣлать большой ошибки на практикѣ, можно было допустить его равнымъ a; то не трудно было бы оное уравненіе обынтегралить, потому что въ такомъ случаѣ мы получили бы

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}},$$ котората вторая часть представитъ логариѳмической дифференціалъ. Посмотримъ же теперь, до коихъ поръ можно предполагать количество $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 \text{ и проч.}}{1 - zz}$ постояннымъ.

511. Поелику z означаетъ тангенсъ половины угла, которой кривая линея составляетъ съ горизонтомъ въ какой нибудь точкѣ; то самая большая величина его въ опускающейся къ низу части кривой линеи будетъ половина угла метанія. На примѣръ ежели допустимъ уголъ метанія равнымъ 25 градусамъ, то членъ $\frac{\frac{2}{3}z^2}{1 - zz}$ или $\frac{2z}{1 - zz}$

$\times \frac{1}{3} z$, которой гораздо больше послѣдующихъ, будетъ $=$ *танг.* $25^\circ \times \frac{1}{3}$ *танг.* $12^\circ\ 30'$; но это количество равняется около 0,034; и слѣд. во всемъ пространствѣ нижней отрасли количество $\frac{1 + \frac{2}{3} z^2 + \frac{4}{15} z^4 \text{ и проч.}}{1 - zz}$

можетъ только перемѣняться отъ 1,034 до 1. И такъ можно по крайней мѣрѣ до 25 градусовъ безъ большой ошибки предполагать $1 + \frac{\frac{2}{3} z^2 + \frac{4}{15} z^4}{1 - zz}$ постояннымъ количествомъ.

512. А дабы узнать, какое постоянное количество приличнѣе вставливать въ мѣсто $1 + \frac{\frac{2}{3} z^2 \text{ и проч.}}{1 - zz}$, то замѣчаю, что по допущеніи скорости бросанія весьма великою, поднимающаяся къ верху отрасль должна большею своею частію AC (*фиг.* 52) чувствительно составлять прямую линею; и потому z сохранитъ почти во всей цѣлости начальную свою величину во всемъ пространствѣ AC. И такъ приличнѣе всего здѣлать $z =$ *танг.* $\frac{1}{2}$I.

513. И такъ 1е для выстрѣловъ, производимыхъ подъ углами меньше 25 граду-

совъ, уравненіе $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$

представляетъ съ довольною точностію кривую линею параболу, по крайней мѣрѣ относительно къ восходящей ея отрасли, предположивъ $a = 1 +$ . . . .

$\frac{\frac{2}{3}\ \text{танг}^2.\ \frac{1}{2}\ \mathrm{I} + \frac{4}{15}\ \text{танг}^4.\ \frac{1}{2}\ \mathrm{I}\ \text{и проч.}}{1 - \text{танг}^2.\ \frac{1}{2}\ \mathrm{I}}$.

514. Чтожъ принадлежитъ до опускающейся къ низу части, то хотя z, миновавъ точку D, гдѣ склоненіе одинаково съ склоненіемъ при точкѣ A, должно часъ отъ часу больше увеличиваться; однакожъ погрѣшность, происходящая отъ такого предположенія, будетъ имѣть меньше вліянія на эту отрасль, чѣмъ на первую. Ибо z дѣлается въ такомъ случаѣ отрицательнымъ, и слѣд. знаменатель $C - \frac{2z}{1-zz}$ (1 + и проч.) вмѣсто того, чтобъ показывать разность двухъ количествъ, будетъ представлять ихъ сумму; слѣд. погрѣшность въ знаменателѣ

тѣмъ менѣе будетъ имѣть вліянія на величину дроби. И такъ можно принимать уравненіе $\frac{9pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$ изображающимъ совершенную параболу, лишь бы кривая линея, описанная тѣломъ, не сдѣлала при точкѣ E паденія весьма большаго угла съ горизонтомъ.

515. Разсмотримъ теперь въ особенности, какое дѣйствіе имѣетъ это приближеніе на выстрѣлы.

Величина $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}\,(1 + \text{и проч.})}$

здѣлавшись чрезмѣрно малою, по допущеніи $z = o$, то есть, при верьху кривой линеи, показываетъ, что $\frac{2px}{k^2}$ есть разность между нѣкоторымъ постояннымъ количествомъ и интеграломъ $\frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}\,(1 + \text{и проч.})}$,

то есть, показываетъ, что $\frac{2px}{k^{\prime}} = C^{\prime} -$

$$\int \frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}(1 + \text{и проч})}$$

И такъ глядя

потому, какую величину сдѣлаетъ приближеніе подъ знакомъ $\int$ весьма большую, или весьма малую, заключаемъ о выстрѣлѣ, что онъ въ первомъ случаѣ будетъ весьма малъ, а во второмъ очень великъ.

516. А поелику мы принимаемъ за a въ количествѣ $\frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$ такую величину, которая въ самомъ дѣлѣ больше настоящаго фактора, вмѣсто которaго мы ее вставливаемъ; и потому она должна увеличить количество подъ знакомъ $\int$. Слѣд. по приближенію для восходящей отрасли выстрѣлы выходятъ меньше, чѣмъ въ серединѣ одинаковой густоты.

517. Для опускающейся отрасли, гдѣ z становится отрицательнымъ, уравненіе

превращается въ $2px = C' + \ldots$

$$\int \frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C + \frac{2z}{1-zz}(1 + \text{и проч.})}$$; величина a и тутъ еще бываетъ слишкомъ велика отъ B (*фиг. 52*) до точки D, гдѣ склоненіе становится одинаково съ тѣмъ, какое при точкѣ A, и слѣд. приближеніе дѣлаетъ выстрѣлъ также очень малымъ. Но перейдя за точку D величина a становится слишкомъ мала, и потому учиняетъ количество подъ знакомъ $\int$ весьма великимъ; а это увеличиваетъ выстрѣлъ.

А какъ усугубленіе отъ D до E не можетъ вознаградить уменьшенія отъ A до D; то должно заключить вообще, что приближеніе сдѣлало бы выстрѣлы слишкомъ малыми и тогда, когда бы величина C была въ точности извѣстна.

А поелику постоянное C' опредѣлено чрезъ приближеніе, то величина его вознаграждаетъ весьма много недостатокъ величины a; такимъ образомъ при самыхъ большихъ углахъ выстрѣлы будутъ вообще довольно вѣрны въ серединѣ одинакой густоты.

518. Не трудно было бы здѣлать это приближенiе еще вѣрнѣе, давши другой видъ знаменателю величины dx; но мы сiе изслѣдованiе намѣрены теперь отложить, и помѣстить его въ концѣ сей части; потому что уравненiе здѣлавшись вѣрнѣе для выстрѣловъ, производимыхъ въ одинаковой срединѣ, не болѣе будетъ совсѣмъ тѣмъ согласоваться съ опытомъ, естьли мы не обратимъ вниманiя на средства, которыя должно употреблять при измѣненiи густоты. Притомъ же это изслѣдованiе можетъ насъ удалить отъ нашего предмета.

519. И такъ приступимъ къ окончательному уравненiю.

Дадимъ сначала количеству С и фактору a такой видъ, который былъ бы легче для числовой выкладки.

Мы вывели (513) $a = 1 +$

$$\frac{\frac{2}{3}\,\text{танг}^2.\,\frac{1}{2}\,I + \frac{4}{15}\,\text{танг}^4.\,\frac{1}{2}\,I + \frac{4}{105}\,\text{танг}^6.\,\frac{1}{2}\,I \text{ и проч.}}{1 - \text{танг}^2.\,\frac{1}{2}\,I}$$

и слѣд. можемъ дать a другой такой видъ,

$$= 1 + \frac{2\text{танг}.\,\frac{1}{2}\,I}{1 - \text{танг}^2.\,\frac{1}{2}\,I} \times \left(\frac{1}{3}\,\text{танг}.\,\frac{1}{2}\,I + \frac{2}{15}\,\text{танг}^3.\,\frac{1}{2}\,I + \frac{2}{105}\,\text{танг}^5.\,\frac{1}{2}\,I \text{ и проч.}\right);$$

а поелику $\frac{2\text{танг.}\ \frac{1}{2}\ \text{I}}{1 - \text{танг}^2.\ \frac{1}{2}\ \text{I}} = \text{танг. I}$, то получимъ $a = 1 + \text{танг. I} \times \left(\frac{1}{3}\ \text{танг.}\ \frac{1}{2}\ \text{I} + \frac{2}{15}\ \text{танг}^3.\ \frac{1}{2}\ \text{I} + \frac{2}{135}\ \text{танг}^5.\ \frac{1}{2}\ \text{I}\right.$ и проч.)

Что принадлежитъ до C, то мы нашли выше $C = \frac{k^2}{4ph\ \text{кос}^2.\ \text{I}} + \ldots\ldots \frac{\text{танг.}\ \frac{1}{2}\ \text{I} + \text{танг}^3.\ \frac{1}{2}\ \text{I}}{1 - \text{танг}^2\ \frac{1}{2}\ \text{I}} + \frac{1}{2}\ \text{лог.}\ \ldots \left(\frac{1 + \text{танг.}\ \frac{1}{2}\ \text{I}}{1 - \text{танг}\ \frac{1}{2}\ \text{I}}\right)$; представивъ это количество строкою, и употребивъ для него такія же разсужденія, какія выше (509) для z, будемъ имѣть $C = \frac{k^2}{4ph\ \text{кос}^2.\ \frac{1}{2}\ \text{I}} + \frac{2\ \text{танг.}\ \frac{1}{2}\ \text{I}}{1 - \text{танг}^2.\ \frac{1}{2}\ \text{I}} \left(1 + \ldots\ldots\ldots \frac{\frac{2}{3}\ \text{танг}^2.\ \frac{1}{2}\ \text{I} + \frac{4}{15}\ \text{танг}^4.\ \frac{1}{2}\ \text{I} + \text{и проч.}}{1 - \text{танг}^2.\ \frac{1}{2}\ \text{I}}\right)$,

то есть, $C = \frac{k^2}{4ph\ \text{кос}^2.\ \text{I}} + a\ \text{танг. I}$.

520. Здѣлавъ это, получимъ $\frac{2pdx}{k^2} =$

$$-\frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C-\frac{2az}{1-zz}}$$, котораго интеграломъ будетъ (100) $\frac{2px}{k^2} = C' + \ldots\ldots$

$\frac{1}{a}$ *лог.* $\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$.

Опредѣляя постоянное C', замѣчаю, что при точкѣ метанія A (*фиг.* 52) должно $x = o$; а какъ при точкѣ A находимъ также $\frac{2z}{1-zz} =$ *танг.* I, и потому $o = C' +$

$\frac{1}{a}$ *лог.* (C — *a танг.* I); слѣд. $C' = \frac{1}{a}$

лог. (C — *a танг.* I) $= \frac{1}{a}$ *лог.* $\frac{k^2}{4ph \text{ кос}^2 \text{ I}}$,

по вставкѣ вмѣсто C величины его. И такъ

$$\frac{2px}{k^2} = \frac{1}{a} \text{ лог. } \frac{4ph \text{ кос}^2 \text{ I}}{k^2}\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right).$$

Наконецъ принявъ *e* за число, коего логариѳмъ равенъ 1, выведемъ $e^{\frac{2apx}{k^2}} = \frac{4ph \text{ кос}^2 \text{ I}}{k^2}$

$\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$, и $\frac{2z}{1-zz} = \frac{1}{a}$ . . .

$\left(C - \frac{k^2}{4ph\ кос^2\ I} e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$. Но мы нашли

также, что $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1-zz}$, слѣд. $dy =$

$\frac{Cdx}{a} - \frac{k^2 dx}{4aph\ кос^2.\ I} e^{\frac{2apx}{k^2}}$. Обынтегра-

ливъ снова, и опредѣливъ постоянное по допущеніи $y = o$, когда x будетъ также $= o$,

получимъ $y = \frac{Cx}{a} + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ кос^2.\ I}$ . . . .

$\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, или вставивъ вмѣсто C величину его, $y = \left(танг.\ I + \frac{k^2}{4aph\ кос^2.\ I}\right)$

$x + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ кос^2.\ I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$. Таково будетъ заключительное уравненіе перваго приближенія, по которому можно опредѣлять выстрѣлы, начиная отъ самыхъ малыхъ скоростей до такихъ по крайней мѣрѣ, какія предполагаются въ выше означенной на *страницѣ* 169 таблицѣ здѣланныхъ опытовъ.

521. Естьли сопротивленіе будетъ мало, и скорость метанія посредственна, въ какомъ случаѣ амплитуда должна быть чувствительно меньше $\frac{k^2}{2ap}$; то самая большая величина $\frac{2apx}{k^2}$ выведетъ малѣйшую дробь, и слѣд. можно вмѣсто $e^{\frac{2apx}{k^2}}$ взять приближенную величину его (90) $1 + \frac{2apx}{k^2} + \ldots \frac{2a^2p^2x^2}{k^4} + \frac{4a^3p^3x^3}{3k^6}$ и проч. Послѣ чего уравненіе превратится въ $y = x$ *танг.* $I + \frac{k^2x}{4aph \text{ кос}^2. I} \ldots - \frac{k^2x}{4aph \text{ кос}^2. I} - \frac{x^2}{4h \text{ кос}. I} - \frac{apx^3}{6k^2h \text{ кос}^2. I}$, и проч. а по приведеніи въ $y = x$ *танг.* $I - \frac{x^2}{4h \text{ кос}^2. I} - \frac{apx^3}{6k^2h \text{ кос}^2. I}$ и проч.

Когда же сопротивленія не будетъ совсѣмъ, въ сходственность чего $\frac{p}{k^2} = o$; тогда выходитъ $y = x$ *танг.* $I - \frac{x^2}{4h \text{ кос}^2. I}$, или $4hy$ *кос*^{2}. $I = 4hx$ *син.* I *кос.* I — xx такое же точно уравненіе, какое мы нашли выше (472).

522. Наконецъ естьли сопротивленіе не уничтожится совершенно, но будетъ таково, что $\frac{k^2}{2ap}$ будетъ больше x величины амплитуды; то можно въ такомъ случаѣ опредѣлить кривую линею посред-

ствомъ строки, $y = x$ *танг.* $\mathrm{I} - \frac{x^2}{4h\ кос^2.\ \mathrm{I}} \ldots$

$- \frac{apx^3}{6k^2h\ кос^2.\ \mathrm{I}}$ и проч., продолживъ ее достаточно, глядя по малости дроби $\frac{2apx}{k^2}$. Когда же дробь $\frac{2apx}{k^2}$ не будетъ слишкомъ мала, то короче и вѣрнѣе выкладку сдѣлаешь, употребивъ прежнее показательное уравненіе.

523. Мы тотчасъ увидимъ, что изъ помѣщеннаго въ предыдущей таблицѣ опыта подъ 15 градусами выводимъ $\frac{2ap}{k^2} = 0{,}0016597$; а какъ тотъ же опытъ даетъ $x = 1675$, то заключаемъ, что $\frac{2apx}{k^2} =$ близу 2,78. Слѣд. для выстрѣловъ, содержащихся въ этой таблицѣ не можно употребить строки $y = x$ *танг.* $\mathrm{I} - \frac{x^2}{4h\ кос^2.\ \mathrm{I}} - \frac{apx^3}{6k^2h\ кос^2.\ \mathrm{I}}$ и проч.; потому что она выходитъ отдалительная (divergente).

524. Посмотримъ теперь, до коихъ поръ теорія сія согласуется съ опытомъ.

Подъ количествомъ p мы разумѣли тяжесть брошеннаго въ воздухъ тѣла, или лучше сказать, скорость какую тѣло должно получить, упадая въ пустотѣ безъ вѣса занимаемой имъ величины воздуха (312).

Представивъ чрезъ $2r$ поперешникъ ядра, а чрезъ $1 : c$ содержаніе діаметра къ окружности, получимъ $\frac{4}{3} cr^3$ за величину онаго ядра. Послѣ чего на-

звавъ D густоту воздуха, а D' плотность ядра, будемъ имѣть въ $\frac{4}{3} D'cr^3$ массу ядра, а въ $\frac{4Dcr^3}{3}$ массу величины воздуха, которой оно занимаетъ мѣсто.

Естьли представимъ чрезъ p' скорость, которую сообщаетъ тяжесть свободному тѣлу въ секунду времени, то получимъ въ $p'dt$ туже скорость въ одно мгновенïе; въ сходственность чего $\frac{4D'cr^3}{3} p'dt$ изобразитъ вѣсъ ядра въ пустотѣ, а $\frac{4Dcr^3}{3} p'dt$ . . вѣсъ, занимаемый тѣломъ величины воздуха; и слѣд $\frac{4cr^3}{3} p'dt\ (D' - D)$ будетъ означать вѣсъ ядра въ воздухѣ. Естьли раздѣлимъ это количество на массу $\frac{4cr^3}{3} D'$ ядра, то въ $p'dt \left(\frac{D' - D}{D'}\right)$ будемъ имѣть такую скорость, какую тяжесть дѣйствительно сообщаетъ въ воздухѣ ядру въ одно мгновенïе; отсюда выходитъ $p'dt\ \frac{(D' - D)}{D'} = pdt$, или $p = \frac{D' - D}{D'}\ p'$.

Но удѣльныя тяжести воздуха и воды содержатся $= 1 : 850$, а удѣльная тяжесть чугуна къ удѣльной тяжести воды $= 7,114 : 1$; слѣд. $D' : D = 6047 : 1$, и слѣд. $p = \frac{6046}{6047}\ p'$. А какъ эта дробь весьма близко подходитъ къ единицѣ, то мы примемъ $p = p' = 30$ф,2 $= 5^{m},03333$, котораго логариѳмомъ будетъ *лог.* $p = 0,7018556$.

Мы предположили выше $\frac{nDS}{M} = \frac{p}{k^2}$. Но (382) $n = \frac{1}{2}$; а (396) $S = \frac{1}{2} S'$, S' означаетъ площадь большаго круга ядра. Сверхъ того $S' = cr^2$; слѣд. $S = \frac{1}{2} cr^2$. Но мы видѣли также, что $M = \frac{4}{3} cr^3 D'$, и слѣд. по вставкѣ сихъ величинъ будемъ имѣть

$$\frac{nDS}{M} = \frac{p}{k^2} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}.$$

А поелику $\frac{D}{D'} = \frac{1}{8047}$, $2r = 5д,444 = \ldots$ оф,453666 = от,075611, то заключимъ наконецъ, что лог. $\frac{p}{k^2} = 6{,}9139057$.

525. Станемъ вопервыхъ опредѣлять силу пороха, то есть сыщемъ высоту h приличную скорости ядра при вылетѣ его изъ пушки.

Поелику первая проба, внесенная въ предыдущей таблицѣ, здѣлана подъ угломъ 4 градусовъ, которой будучи весьма малъ, болѣе могъ бы послужить къ нашему предмету, естьли бы мы были совершенно увѣрены, что ядро при вылетѣ изъ пушки послѣдуетъ въ точности направленїю склоненному на 4 градуса къ горизонту; но какъ малѣйшая ошибка въ разсужденїи сего направленїя можетъ быть причиною большой невѣрности въ измѣренїи силы пороха, то мы его оставляемъ. Уголъ 15 градусовъ съ одной стороны такъ малъ, что можно употребить его законно въ выкладкѣ, а съ другой стороны довольно великъ, что не имѣемъ причины опасаться такой разности въ направленїи ядра съ этимъ угломъ, которая могла бы сдѣлать чувствительное впечатлѣнїе на искомую мѣру.

И такъ начнемъ трактовать выстрѣлъ 1675, найденной подъ угломъ 15 градусовъ; то есть, положимъ $x = 1675$. Естьли въ уравненіи $y = x \ldots \left(\text{танг. I} + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2\ \text{I}}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ \text{кос}^2\ \text{I}} \left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$ допустимъ $y = 0$, а $x = 1675$; то величина h опредѣлится по слѣдующему уравненію $0 = 1675 \left(\text{танг. I} + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2\ \text{I}}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ \text{кос}^2\ \text{I}} \ldots \left(1 - e^{\frac{2ap}{k^2} \times 1675}\right)$.

Поелику извѣстно намъ $\frac{k^2}{p}$, то *танг.* I и *кос.* I не трудно опредѣлить по таблицамъ; слѣд. вся нужда теперь узнать величину a.

По предположеніи сего мы выведемъ . . . . . .
лог. танг. 15° 0′ . . . 9,4280525.
лог. кос. 15° 0′ . . . 9,9849438.
танг. 15 0 . . . 0,26795.
лог. танг. 7 30 . . . 9,1194291.

А поелику $a = 1 + \text{танг. I} \left(\frac{1}{3}\ \text{танг.}\ \frac{1}{2}\ \text{I} + \frac{2}{15}\ \text{танг}^3\ \frac{1}{2}\ \text{I} + \text{и проч.}\right)$; то поступаю такъ:

лог. танг. $\frac{1}{2}$ I . . 9,1194291	*лог. танг*^{3} $\frac{1}{2}$ I . . 7,3582873.
дополн. *лог.* 3 . . 9,5228787	*лог.* 2 . . . . 0,3010300.
лог. $\frac{1}{3}$ *танг.* $\frac{1}{2}$I . . 8,6423078	дополн. *лог.* 15 8,8239087.
	лог. $\frac{2}{15}$ *танг*^{3} $\frac{1}{2}$I . 6,4832260.

Въ сходственность сего $\frac{1}{3}$ *танг.* $\frac{1}{2}$ I + $\frac{2}{15}$ *танг*^{3} $\frac{1}{2}$ I = 0,04389 + 0,00030 = 0,04419.
лог. 0,04419. . . . . 8,6453240.
лог. танг. I . . . . 9,4280525.

Слѣд. *лог. танг.* I$(\frac{1}{3}$ *танг.* $\frac{1}{2}$ I $+ \frac{2}{15}$ *танг*^{3}. $\frac{1}{2}$ I$)$ . . 8,0733765.
которой отвѣчаетъ . . . . 0,01184.
Слѣд. $a = 1,01184$, а *лог.* a . . . . 0,0051119.

Послѣ сего получимъ . . . . . . *лог.* $\frac{k^2}{p} = 3,0860943.$

дополн. *лог.* a . . . . 9,9948881.
дополн. *лог.* 2 . . . . 9,6989700.

Слѣд. *лог.* $\frac{k^2}{2ap}$ . . . . . 2,7799524.

и *лог.* $\frac{2ap}{k^2}$ . . . . 7,2200476.

лог. 1675 . . . . 3,2240148.

лог. $\frac{2ap}{k^2} \times 1675$ . . . . 0,4440624.

которой отвѣчаетъ . . . . . . 2,780112.

При томъ же *лог.* $\frac{k^2}{2ap}$ . . . . 2,7799524.

дополн. *лог.* 2 . . . . 9,6989700.

лог. $\frac{k^2}{4ap}$ . . . . 2,4789224.

дополн. *лог. кос*^{2}. I . . . . 0,0301124.

лог. $\frac{k^2}{4ap \text{ кос}^2. \text{ I}}$ . . . . . . 2,5090348.

лог. $\frac{k^2}{2ap}$ . . . . 2,7799524.

лог. $\frac{k^4}{8a^2p^2 \text{ кос}^2. \text{ I}}$ . . . . 5,2889872.

Слѣд. $\frac{k^4}{8a^2p^2 \text{ кос}^2. \text{ I}} = 194530,27.$

Сверхъ того *лог.* $\frac{k^2}{4ap \text{ кос}^2. \text{ I}}$ . . . . 2,5090348.

лог. 1675 . . . . 3,2240148.

$$лог. \frac{1675\ k^2}{4ap\ кос^2 I} \ldots\ldots\ldots 5,7330496.$$

$$Слѣд. \frac{1675\ k^2}{4ap\ кос^2 I} = 540816.$$

Наконецъ *лог. танг.* I . . . . 9,4280525.

лог. 1675 . . . . . 3,2240148.

лог. 1675 *танг.* I . . . . . 2,6520673.

Слѣд. 1675 *танг.* I = 448,815.

И такъ уравненіе превратится въ $0 = 448,815 + \frac{540816}{h} + \frac{194530,27}{h}(1 - e^{2,780112})$.

А какъ вообще e^b изображаетъ такое число, которое имѣетъ b гиперболическимъ логариѳмомъ, и слѣд. такое число, которое (88) имѣетъ $b \times 0,4342945$ обыкновеннымъ логариѳмомъ; и потому умноживъ 2,780112 на 0,4342945, получимъ 1,2073873 обыкновеннымъ логариѳмомъ количества $e^{2,780112}$; но этотъ логариѳмъ отвѣчаетъ числу 16,120829; слѣд. $0 = 448,815 + \frac{540816}{h} - \frac{194530,27 \times 15,120829}{h}$, или $0 = 448,815 - \frac{2400643}{h}$; слѣд. $h = \frac{2400643}{448,815} = 5348$т, 85, а логариѳмъ его или *лог.* $h = 3,7282603$.

526. Отсюда явствуетъ, что 24 фунтовое ядро, выстрѣленное 9 фунтовымъ зарядомъ пороха, вылетаетъ изъ орудія со скоростію, приличною высотѣ 5348т, 85 или 32093 футовъ. Но упавшее съ такой высоты тѣло въ пустотѣ пріобрѣтаетъ (176) 1393хъ футовую скорость въ секунду времени. Слѣд. 9ти фунтовой зарядъ пороха сообщаетъ 24хъ фунтовому ядру при вылетѣ его изъ пушки 1393хъ футовую скорость въ секунду.

527. Отсюда выводимъ 1е подтвержденїе на сказанное нами (421) о силѣ пороха. 2е Находимъ чрезвычайную разность для вычисленїя силы пороха. Ибо естьли принять выстрѣлъ подъ 15 градусами здѣланнымъ въ пустотѣ, то высота h должна бы выйти 1675 тоазовъ; но она здѣсь напротивъ выходитъ въ 5349 тоазовъ. 3е Что хотя по сравненїю второй колонны съ третьею въ приложенной выше таблицѣ (*стран.* 169), находимъ для 20 градусовъ 413 тоазовъ только разности между наблюденнымъ выстрѣломъ и тѣмъ, какой бы долженъ произойти въ пустотѣ по предположенїю, что выстрѣлъ подъ 15 градусами здѣланъ въ ней же; однако эта разность на самомъ дѣлѣ выходитъ гораздо больше, ибо принявъ за мѣру силы пороха не 1675 тоазовъ, а 5348ᵗ,85, не трудно по формулѣ $2h$ *син* $2a$ заключить, что выстрѣлъ въ пустотѣ подъ 20 градусами будетъ въ 6876 тоазовъ. Но въ воздухѣ этотъ выстрѣлъ найденъ въ 1740, и слѣд. сопротивленїе воздуха уменьшило его тремя четвертями.

528. Посмотримъ теперь, какїе выдутъ по теорїи выстрѣлы подъ 4 и 20 градусами.

Возвратимся къ уравненїю $y = x$ .... $\left(\text{танг. I} + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2\text{. I}}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ \text{кос}^2\text{. I}}$ ...... $\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$. Для опредѣленїя выстрѣла должно предположить $y = o$, и потомъ вывести величину x изъ уравненїя $x\left(\text{танг. I} + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2\ \text{I}}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ \text{кос}^2\text{. I}}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right) = o$.

А какъ это уравненіе не можно рѣшить прямо, то должно вставить вмѣсто x разныя величины, пока найдется такая, которая будетъ годиться для сего уравненія.

Малость угла 4 градусовъ позволяетъ допустить $a = 1$. И такъ уравненіе, которое надобно рѣшить, будетъ слѣдующее . . . .

$$o = x\left(\text{танг. } 4^\circ + \frac{k^2}{4ph\ \text{кос}^2\ 4^\circ}\right) + \frac{k^4}{8p^2h\ \text{кос}^2\ 4^\circ}\left(1 - e^{\frac{2px}{k^2}}\right).$$

Мы нашли выше величины $\frac{k^2}{p}$ и h, а по таблицамъ опредѣлимъ *танг.* 4° и *кос.* 4°. Положимъ $x = 820$, и по вставкѣ найдемъ положительной результатъ 5 туазовъ; а это показываетъ, что на разстояніи 820 туазовъ, ордоната выходитъ выше 5тью тоазами горизонтальной линеи; слѣд. амплитуда должна быть больше 820 туазовъ.

Естьли вмѣсто 820 тоазовъ допустимъ попеременно 840 и 860, то найдемъ положительные результаты, но уменьшающіеся; наконецъ вставивъ число 862, найдемъ его удовлетворительнымъ.

И такъ по теоріи выстрѣлъ подъ 4 градусами выходитъ въ 862 туазовъ, а на самомъ дѣлѣ въ 820; слѣд. погрѣшность состоитъ около $\frac{1}{20}$ части.

Въ пустотѣ этому выстрѣлу надлежалобы быть въ 1489 тоазовъ.

Для 20 градусовъ будемъ имѣть $a = 1,02165$, а *лог.* $a = 0,0093021$. Взявши изъ таблицъ величины *танг.* 20 градусовъ и *кос.* 20 градусовъ, и вставивъ най-

денныя выше величины для $\frac{k^2}{p}$ и h въ уравненіи $\rho = x\left(\text{танг. I} + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2\ \text{I}}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ \text{кос}^2\ \text{I}}$ $\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, найдемъ по вставкѣ наблюденнаго для x выстрѣла 1740, положительный результатъ около 85 тоазовъ. Естьли допустимъ теперь попеременно числа 1780, 1800, 1820 и 1840, то изъ всѣхъ ихъ одно только годится последнее. Слѣд. выстрѣлъ подъ 20 градусами по теоріи выходитъ въ 1840 туазовъ; и слѣд. разность теоріи съ опытомъ будетъ около $\frac{1}{17}$ части этого выстрѣла.

Въ пустотѣ сей выстрѣлъ вмѣсто 1840 туазовъ долженъ бы имѣть 6876. Отсюда явствуетъ теперь, сколько теорія подходитъ близко къ опыту, хотя она (517) не во всей точности здѣлана исправно; ибо вычисляемые выстрѣлы гораздо больше тѣхъ, какіе бы, казалось (517), должны быть, но мы этому скоро увидимъ довольную причину.

529. Естьли здѣлано будетъ такое же вычисленіе для угловъ 25, 30, 35, 40, 45 градусовъ, то получимъ сходственными величинами $a = 1{,}03514$; $a = 1{,}05378$; $a = 1{,}075958$; $a = 1{,}10730$; $a = 1{,}14777$, и послѣ приличныхъ вставокъ выведемъ такіе выстрѣлы, какіе видѣть можно въ приложенной ниже таблицѣ.

А какъ впрочемъ можетъ случиться весьма трудное вычисленіе величины a означенною (519) строкою, когда уголъ I будетъ нѣсколько великъ; то можно употребить гораздо легче слѣдующую формулу, $a = \frac{1}{2\ \text{кос. I}} + \frac{1}{2}\ \text{кот. I лог.}\ \frac{1}{\text{танг.}(45^\circ - \frac{1}{2}\text{I})}$, или $a =$

$\frac{1}{2}$ *сек.* I + $\frac{1}{2}$ *кот.* I *лог. танг.* (45° + $\frac{1}{2}$ I). Этотъ логариѳмъ гиперболической.

Эта формула выводится изъ уравненія $C = \frac{k^2}{4ph \text{ кос}^2 \text{ I}} + a \text{ танг. I}$, найденнаго (519), и изъ

$$C = \frac{k^2}{4ph \text{ кос}^2 \text{ I}} + \frac{\text{танг. } \frac{1}{2} \text{ I} + \text{танг}^3 \frac{1}{2} \text{ I}}{1 - \text{танг}^2 \frac{1}{2} \text{ I}} + \ldots$$

$\frac{1}{2} \text{лог.} \frac{1 + \text{танг. } \frac{1}{2} \text{ I}}{1 - \text{танг. } \frac{1}{2} \text{ I}}$, найденнаго (505).

530. Наконецъ для новаго сравненія сей теоріи съ опытомъ, мы сдѣлаемъ еще выкладку для горизонтальныхъ выстрѣловъ.

Опредѣленіе, сдѣланное нами (483), весьма разнится съ опытомъ, и этому причина теперь видна. Ибо тамъ принимали мы силу пороха дѣйствующею въ пустотѣ; слѣд. она должна быть гораздо слабѣе настоящей, и горизонтальные выстрѣлы должны быть также гораздо меньше.

Но ежели мы опредѣлимъ тотъ же выстрѣлъ по теоріи, то непремѣнно подойдемъ ближе къ опыту. И такъ опредѣлимъ его для орудія 24, по 9 фунтовому заряду пороха.

Уголъ цѣли съ продолженіемъ оси состоитъ въ пушкѣ 24 изъ 1 градуса 11 минутъ.

Въ сходственность сего можно принимать *a* и *кос.* I порознь равными единицѣ. Допустимъ также, что разстояніе BL (*фиг.* 44), на которомъ встрѣчается кривая линея въ первой разъ съ линеею цѣли, чрезвычайно мала въ разсужденіи самаго выстрѣла, какъ то и дѣйствительно должно быть.

По допущеніи сего получимъ $I = 1^\circ 11'$; и уравненіе, долженствующее опредѣлить выстрѣлъ x, изобразится чрезъ $o = x\left(\text{танг. } 1^\circ 11' + \frac{k^2}{4ph}\right) + \frac{k^4}{8p^2h}\left(1 - e^{\frac{2ap}{k^2}}\right)$.

Естьли вставишь вмѣсто x 300 туазовъ, то найдется положительной результатъ около 1 тоаза; а это показываетъ, что горизонтальный выстрѣлъ долженъ быть нѣсколько больше 300 туазовъ; по вставкѣ же 320 тоазовъ выходитъ отрицательной результатъ — $0^m,4$; отсюда заключаемъ, что этотъ выстрѣлъ долженъ быть между 300 и 320 тоазами Наконецъ вставивъ 314 тоазовъ, находимъ это число совершенно разрѣшающимъ уравненіе. Но и по учиненнымъ опытамъ горизонтальный выстрѣлъ изъ пушки 24, заряженной 9 фунтами пороха также вышелъ около 300 тоазовъ.

531. И такъ возобновивъ все предыдущее, получимъ сходственные результаты въ слѣдующей таблицѣ.

ТАБЛИЦА какъ пробныхъ, такъ и выкладкою найденныхъ выстрѣловъ для пушки 24, заряженной 9 фунтами пороха; гдѣ пріемлется въ измѣреніе силы пороха наблюденный выстрѣлъ подъ 15 град: сообразно съ теоріею о сопротивленіи.

ПРОБНЫЕ.			ПО ТЕОРІИ, гдѣ зделано только первое приближеніе.	ПО ПАРАБОЛѢ въ пустотѣ.
склон.		выстрѣлы	выстрѣлы	выстрѣлы
град.	мин.	тоаз.	тоаз.	тоаз.
4	0	820	862	1489
15	0	1675	1675	5349
20	0	1740	1840	6876
25	0	1825	1956	8191
30	0	1910	2011	9265
35	0	2020	2038	10053
40	0	2050	2035	10526
45	0	2200	1992	10698
Горизонтальной выстрѣлъ				
1	11	300	314	442

532. Сїя таблица довольно показываетЪ, какая чрезмѣрная разность находится между выстрѣлами настоящими и тѣми, какїе бы должны произойти безЪ сопротивленїя середины.

533. При сравненїи выстрѣловЪ выкладкою найденныхЪ сЪ настоящими, замѣчаемЪ, что выкладка сЪ опытами сходствуетЪ довольно достаточно по первому приближенїю; ибо 1е. часто находимЪ, что подЪ одинакимЪ числомЪ градусовЪ разность бываетЪ не болѣе 40 и 50 тоазовЪ, особливо когда выстрѣлы очень велики.

534. 2е. ЯвствуетЪ также изЪ сей таблицы, что всѣ выкладочные выстрѣлы даже до 40° больше наблюденныхЪ. И хотя выстрѣлы, вычисленные по первому приближенїю, не должны быть во всей точности одинаковы сЪ наблюденными; однакожЪ они не могутЪ имѣть такой разности, какая здѣсь видна; эта разность, означающая излишество даже до 40 градусовЪ, очевидно доказываетЪ, что выстрѣлЪ подЪ 15 градусами, принятый вЪ 1675 тоазовЪ, будетЪ слишкомЪ великЪ и тогда, когда допустимЪ густоту воздуха постоянною, то есть, повсюду одинакою.

Хотя же подЪ 15 градусами разность между выстрѣломЪ, выведеннымЪ изЪ уравненїя кривой линеи, по всей строгости обинтеграленнаго, и тѣмЪ, которой найденЪ по преподанному теперь способу интегрованїя, будетЪ нечувствительна; однако слѣдующїя причины не менѣе заставляютЪ насЪ здѣлать нѣкоторую убавку у 1675 тоазовЪ: 1е. сравнивЪ разность наблюденныхЪ выстрѣловЪ отЪ 15 до 20 градусовЪ сЪ разностїю отЪ 20 до 25 градусовЪ, находимЪ ее гораздо меньше настоящей. 2е Самомалѣйшее

уменьшенїе въ семъ выстрѣлѣ можетъ весьма чувствительно согласить теорїю съ опытомъ въ тѣхъ выстрѣлахъ, гдѣ наиболѣе видна погрѣшность; но мы не остановимся здѣсь на семъ соглашенїи, потому что для этого надобно обращать отъ 26 до 30 градусовъ великое вниманїе къ перемѣнѣ воздушной густоты. И потому мы займемся этимъ предметомъ въ концѣ сей книги.

535. Хотя сила пороха, вычисленная нами по наблюденному выстрѣлу подъ 15 градусами, наклонна болѣе къ тому, чтобъ увеличивать выстрѣлы; однако видимъ, что при 45 градусахъ настоящїй сильнѣе выкладочнаго, и что отъ 30 градусовъ до 45 град. выкладочные менѣе и менѣе превосходятъ пробныхъ.

536. Причиною этому неоспоримо служитъ уменьшенїе густоты воздуха на разныхъ возвышенїяхъ ядра. Слѣд. погрѣшности, выходящїя какъ отъ мѣры силы пороха, такъ и отъ принимаемой вездѣ постоянной густоты воздуха, вознаграждаются наиболѣе, говорю я, отъ 30 градусовъ почти до 42. Но послѣ этого числа погрѣшность со стороны постоянной густоты становится больше, чѣмъ со стороны мѣры силы пороха.

537. Впрочемъ какое бы положенїе ни здѣлано было въ разсужденїи уменьшенїя густоты на разныхъ высотахъ; однако, кажется, весьма трудно повѣрить, чтобъ не было погрѣшности въ выстрѣлѣ подъ 45 градусами.

Въ самомъ дѣлѣ можно замѣтить по наблюденнымъ выстрѣламъ, что начиная отъ 25 градусовъ разности выходятъ слѣдующїя:

85т,110т,30т,150т. То есть онѣ увеличиваются до 35 градусовъ и остаются положительны; отъ 35 до 40 град. уменьшаются, но положительны; потомъ отъ 40 до 45 град. опять увеличиваются и еще положительны.

538. Перемѣна въ густотѣ воздуха изъяснитъ, можетъ быть, лучше, для чего самой большой выстрѣлъ, которой по первому приближенію выходитъ почти у 40 градусовъ, остается меньше пробнаго; такъ что судя по наблюденіямъ уголъ самаго большаго выстрѣла въ воздухѣ, кажется, ежели не будетъ у 45 градусовъ, то по крайней мѣрѣ онъ будетъ между 40 и 45 градусами. Съ другой же стороны по предположеніи постоянной густоты, то есть, такой, которая бы вездѣ состояла изъ $\frac{1}{850}$ части удѣльной тяжести воды, уголъ самаго большаго выстрѣла долженъ бы еще выти меньше выводимаго выкладкою. Но перемѣнная густота можетъ приближить этотъ уголъ къ 45 градусамъ; и хотя наблюденный выстрѣлъ подъ 45° выходитъ больше всѣхъ означенныхъ въ таблицѣ, однакожъ никакъ не можно сомнѣваться, чтобъ здѣланные съ раченіемъ опыты подъ 35°, 40° и 45° не вывели самаго большаго выстрѣла ниже 45 град.

539. Здѣлаемъ теперь ближайшее вычисленіе густоты воздуха въ верхней части кривой линеи.

И потому возьмемъ опять уравненіе $y = x \left(\text{танг. I} + \frac{k^2}{4pah\ \text{кос}^2\ \text{I}}\right) + \frac{k^4}{8p^2a^2h\ \text{кос}^2\ \text{I}} \cdots\cdots \left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$. Для опредѣленія самой большой ордонаты, надобно (36) одифференціалить величину y, и приравнять этотъ дифференціалъ къ нулю. Въ сходственность чего будемъ имѣть $0 = dx \ldots$

$\left(\text{танг.} I + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2 I}\right) \cdot \frac{k^2 dx}{4aph\ \text{кос}^2 I} \cdot e^{\frac{2apx}{k^2}}$;

отсюда выводимъ $e^{\frac{2apx}{k^2}} = \frac{\text{танг.} I + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2 I}}{\frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2 I}}$

$= \frac{\frac{b}{k^2}}{4aph\ \text{кос}^2 I} = \frac{4aphb\ \text{кос}^2 I}{k^2}$, здѣлавъ ....

$\text{танг.} I + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2 I} = b$. Слѣд. $\frac{2apx}{k^2}$ лог. e,

или просто $\frac{apx}{2k^2} =$ лог. $\frac{4aphb\ \text{кос}^2 I}{k^2}$, и $x = \ldots$

$\frac{k^2}{2ap}$ лог. $\frac{4aphb\ \text{кос}^2 I}{k^2}$. Напослѣдокъ здѣлавъ

вставку въ величинѣ y, получимъ $y = \frac{bk^2}{2ap} \ldots\ldots$

лог. $\frac{4aphb\ \text{кос}^2 I}{k^2} + \frac{k^4}{8p^2a^2h\ \text{кос}^2 I} \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(1 - \frac{4aphb\ \text{кос}^2 I}{k^2}\right)$.

540. Поелику мы опредѣлили выше величины $\frac{k^2}{p}$, a, h и проч.; то не трудно теперь сдѣлать выкладку и самымъ большимъ высотамъ y, на которыя должно подняться ядро въ выстрѣлахъ, означенныхъ въ предыдущей таблицѣ (стр. 206). По исчисленіи сихъ высотъ, мы составили изъ нихъ слѣдующую таблицу.

541. По этой выкладкѣ и по изъясненной прежде (341), не трудно теперь опредѣлить густоту воздуха по пришествіи ядра на высочайшую точку кривой линеи. И употребивъ эти числа въ данной (341) формулѣ, получимъ нижеслѣдующія результаты.

ТАБЛИЦА самыхъ большихъ высотъ, на которыя должно подняться ядро въ означенныхъ на страницѣ 206 пробахъ; и густоты воздуха на сихъ высотахъ.

УГЛЫ метанія.	Самыя большія высоты.	Густота воздуха на сихъ высотахъ по предположенiи, что она у точки метанія равна 1.
градусы.	тоазы.	
4	19,5	0,99½.
15	173,5	0,97½.
20	269,9	0,94½.
25	376,8	0,92.
30	492	0,90.
35	614	0,87½.
40	741,6	0,85.
45	869,5	0,82½.

542. Поговоримъ еще о времени.

Мы вывели выше (504) уравненіе . . ,
$$\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \frac{1}{2}\ \text{лог.}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = C \ldots - \frac{k^2dt^2}{2dx^2},$$
которое, по приведеніи его въ

строку (509 и слѣд.), обратилось въ $k^2dt^2 = 2dx^2\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$. А какъ мы нашли $C - \frac{2az}{1-zz} = \frac{k^2}{4ph\ кос.^2 I}\, e^{\frac{2apx}{k^2}}$; то получимъ $k^2dt^2 = \frac{2k^2dx^2}{4ph\ кос.^2 I}\, e^{\frac{2apx}{k^2}}$, или $dt = \frac{dxe^{\frac{apx}{k^2}}}{кос.\ I\sqrt{(2ph)}}$; и слѣд. $t = \ldots\ldots\ldots \frac{k^2}{ap\ кос.\ I\sqrt{(2ph)}}\left(e^{\frac{apx}{k^2}} - 1\right)$, по прибавленіи такого постояннаго, чтобъ $t = o$, когда $x = o$.

Ежели количество $\frac{apx}{k^2}$ будетъ весьма мало, то можно взять вмѣсто $\frac{apx}{k^2}$ приближенную величину $1 + \frac{apx}{k} + \frac{a^2p^2x^2}{2k^4} + \frac{a^3p^3x^3}{6k^6}$ и проч.; и въ такомъ случаѣ время t изобразится чрезъ $t = \frac{1}{кос.\ I\sqrt{(2ph)}} \ldots\ldots\ldots \left(x + \frac{apx^2}{2k^2} + \frac{a^2p^2x^3}{6k^4}\ и\ проч.\right)$.

543. Отсюда явствуетЪ, что 1е. естьли сопротивленія не будетЪ совсѣмЪ никакого, то есть, ежели $\frac{p}{k^2}$ будетЪ равно нулю, то получимЪ $t = \frac{x}{кос.\ \mathrm{I}\ \sqrt{(2ph)}}$; но это вЪ точности сходствуетЪ сЪ доказаннымЪ (486).

2е. Когда же $\frac{p}{k^2}$ и не будетЪ $= o$, но количество $\frac{apx^2}{2k^2}$ будетЪ весьма мало вЪ разсужденіи x; тогда получимЪ $t =$ близу . . $\frac{x}{кос.\ \mathrm{I}\ \sqrt{(2ph)}} \times \left(1 + \frac{apx}{2k^2}\right)$; а это показываетЪ, что время будетЪ почти пропорціонально сЪ описаннымЪ пространствомЪ.

544. ЗдѣлаемЪ этому примѣненіе кЪ учиненнымЪ вЪ Стразбургѣ опытамЪ 18 Августа 17[illegible]6 года.

Полевая пушка 12 поставлена была на крѣпости такЪ, что ось ея, направленная по горизонтальной линеи AH (*фиг.* 53), возвышалася вЪ разсужденіи горизонта земли на 14 футовЪ и 4 дюйма; то есть, паденіе DC ядра было вЪ 14 футовЪ и 4 дюйма; и по учиненіи выстрѣловЪ изЪ означенной пушки по 4фунтовому заряду замѣчено, что средній BC состоялЪ изЪ $176\frac{1}{2}$ туазовЪ.

Потомъ пушка перенесена была въ другое мѣсто A' ниже прежняго, гдѣ она возвышалась надъ горизонтомъ только 3ф и 9д; и изъ произведенныхъ выстрѣловъ такимъже зарядомъ среднїй $B'C'$ найденъ въ 95 тпуазовъ.

А какъ высоты, откуда ядро упадало, въ обоихъ случаяхъ весьма малы, то и не можно допустить, чтобъ сопротивленїе могло здѣлать чувствительную перемѣну въ вертикальной скорости; и слѣд. времена сихъ паденїй, или продолженїя выстрѣловъ должны содержаться какъ квадратные корни изъ высотъ, то есть, $= \sqrt{(14{,}3333)} : \sqrt{(3{,}75)} = 1{,}95 : 1$. А поелику содержанїе выстрѣловъ состоитъ изъ $176{,}5 : 95$, или изъ $1{,}86 : 1$, то содержанїе временъ по опыту разнится въ самомъ дѣлѣ весьма мало отъ содержанїя выстрѣловъ. Посмотримъ, что покажетъ намъ теорїя.

Содержанїе временъ по теорїи должно быть таково $176\frac{1}{2}\left(1 + \frac{p}{2k^2} \times 176\frac{1}{2}\right) : 95\left(1 + \frac{p}{2k^2} \times 95\right)$, ежели $\frac{176\frac{1}{2}\,p}{2k^2}$ будетъ дробь мала. Но по выкладкѣ, сдѣланной въ сходственность (524), найдемъ для 4хъ фунтоваго ядра, коего дїаметръ $= 4д{,}321$, или $0^{т}{,}060013$, $\frac{p}{k^2} = 0{,}0010333$; слѣд. $\frac{p \times 176\frac{1}{2}}{2k^2} = 0{,}0912$, и $\frac{p \times 95}{2k^2} = 0{,}0489$. И такъ содержанїе временъ $176\frac{1}{2} \times 1{,}0912 : 95 \times 1{,}0489$ будетъ одинаково съ содержанїемъ $1{,}94 : 1$, которое вопервыхъ весьма мало разнится отъ содержанїя выстрѣловъ, а вовторыхъ весьма близко подходитъ къ содержанїю изъ квадратныхъ корней высотъ, какъ тому и должно быть.

545. Отсюда явствуетъ, что мы весьма много обманемся, естьли заключимъ по симъ опытамъ, что сопротивленіе воздуха не измѣняетъ чувствительно движенія бросаемыхъ тѣлъ. Правда, что содержаніе временъ остается здѣсь почти совсѣмъ такое же, какое бы должно быть въ пустотѣ; но и теорія подтверждаетъ тоже. Однако не можно сомнѣваться, чтобъ середина не дѣлала чувствительнаго сопротивленія.

546. Естьли захотимъ узнать сопротивленіе воздуха, то стоитъ только (520) взять уравненіе $y = x \left(\text{танг.} \, \mathrm{I} + \frac{k^2}{4aph \, \text{кос}^2. \, \mathrm{I}} \right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h \, \text{кос}^2. \, \mathrm{I}}$ $\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}} \right)$, и вставить въ немъ — 14ф,3333 или — 2^{m},3888 вмѣсто y; 176^{m},5 вмѣсто x; нуль вмѣсто *танг.* I; 1 вмѣсто *кос.* I; 1 вмѣсто a, и по онымъ вмѣстѣ съ величиною $\frac{k^2}{p}$, выведенною (544), вычислить величину h. Мы найдемъ $h = 3646$ тоазамъ, и (176) заключимъ, что скорость выстрѣла будетъ во 192^{m} или 1152 фута въ секунду. И такъ мгновенное дѣйствіе сопротивленія, имѣющее изображеніемъ $\frac{nDsu^2dt}{M}$, или $\frac{p}{k^2} u^2dt$, потому что мы (501) зделали $\frac{nDs}{M} = \frac{p}{k^2}$, будетъ въ настоящемъ случаѣ $0{,}0010333u^2dt$, или по вставкѣ 192 тоазовъ величины u (потому что количества, входящія въ $\frac{p}{k^2}$, были выражены въ тоазахъ), это мгновенное дѣйствіе сопротивленія изобразится чрезъ $0{,}0010333 \times (192)^2 \times dt$, или чрезъ $38{,}1 \, dt$.

А поелику мгновенное дѣйствїе тяжести состоитъ изъ $30^{ф},2dt$ или $5^{m},03dt$, то мгновенное или начальное дѣйствїе сопротивленїя къ дѣйствїю тяжести будетъ = 38,1 : 5,03, или = 7,6 : 1, или $7\frac{3}{5}$: 1; то есть, дѣйствїе сопротивленїя въ первое мгновенїе будетъ въ 7 разъ и $\frac{3}{5}$ больше вѣсу ядра.

547. Поелику паденїе ядра было на 14ф и 4д или на 2^{m},3888, что означаетъ весьма близко одну секунду времени, по предположенїи сопротивленїя одинакимъ, въ весьма короткое продолженїе выстрѣла; то оно долженствовало истребить въ ядрѣ на пространствѣ 193 тоазовъ, которое бы оно описало въ это время безъ сопротивленїя, количество $2^{m},3888 \times 7\frac{3}{5}$ или весьма близко 18 туазовъ. Но разность замѣченнаго выстрѣла $176\frac{1}{2}$ тоаз. со 192 тоаз., которые бы должны быть описаны безъ сопротивленїя, есть $15\frac{1}{2}$ тоазовъ; но это въ точности сходствуетъ съ доказаннымъ, потому что въ самомъ дѣлѣ сопротивленїе должно въ продолженїе первой секунды уменьшиться по крайней мѣрѣ весьма мало противу начальнаго своего дѣйствїя.

548. Ежели пожелаемъ употребить выраженїе времени, найденное выше (542), именно $t = \ldots$

$$\frac{k^2\left(e^{\frac{apx}{k^2}} - 1\right)}{ap \text{ косин. } I\, \sqrt{(2ph)}}$$

въ выстрѣлахъ, заключающихся въ приложенной на *стр.* 206 таблицѣ и сравнить ихъ съ продолженїями выстрѣловъ, долженствующихъ произойти въ пустотѣ по такой же силѣ пороха; то мы найдемъ ихъ слѣдующими.

ТАБЛИЦА продолженія выстрѣловъ какъ въ воздухѣ такъ и въ пустотѣ, по допущеніи силы пороха такою же, какую мы опредѣлили (525), для пушки 24 по 9 фунтовому заряду пороха, принявъ выстрѣлъ подъ 15 градусами пробнымъ.

СКЛОНЕНІЕ.	ПРОДОЛЖЕНІЕ выстрѣловъ въ воздухѣ.	ПРОДОЛЖЕНІЕ выстрѣловъ въ пустотѣ.
градусы.	секунды.	секунды.
4. 0	$5\frac{2}{5}$	$6\frac{2}{5}$
15. 0	$16\frac{1}{5}$	$23\frac{9}{10}$
20. 0	20	$31\frac{1}{2}$
25. 0	$23\frac{9}{10}$	39
30. 0	27	$46\frac{1}{10}$
35. 0	$29\frac{7}{10}$	$52\frac{9}{10}$
40. 0	$33\frac{3}{5}$	$59\frac{1}{4}$
45. 0	$35\frac{3}{4}$	$65\frac{1}{5}$
Горизонтальнаго выстрѣла		
1. 11	$1\frac{9}{17}$	$1\frac{9}{10}$

549. Вездѣ въ предыдущихъ разсужденіяхъ своихъ предполагали мы тяжесть постоянною и напра-

вленія дѣйствій ея на движимое въ каждой точкѣ параллельными. Хотя жъ по всей строгости того допустить не можно; но какъ погрѣшность, происходящая отъ перемѣны тяжести и направленій ея весьма мала и ничего не значитъ въ разсужденіи не избѣжныхъ въ практикѣ, то мы за излишнее почитаемъ этимъ заниматься.

Ибо 1.е изъ приложенныхъ выше пробъ (*стр.* 206) самой большой выстрѣлъ есть въ 2200 тоазовъ, то есть, около мили, какихъ полагается 25 на градусъ, и которая равняется 2283 тоазамъ. Слѣд. сей выстрѣлъ отвѣчаетъ при центрѣ земли углу 2′, 29″, и слѣд. направленія тяжести у точки метанія и точки паденія едва разнятся на уголъ 2′, 29″.

2е. Самая большая высота, до которой восходитъ ядро по заряду, предположенному въ опытахъ (допуствивъ густоту постоянною), состоитъ изъ 1400 тоазовъ, какъ то можно видѣть (176 и 525). Но поелику упругость уменьшается по мѣрѣ какъ брошенное тѣло поднимается выше, то допустимъ его поднявшимся на высоту цѣлою половиною больше найденной, то есть, на высоту 2100т, что почти невѣроятно; и слѣд. сіи 2100 тоазовъ будутъ отвѣчать около мили. А какъ тяжесть уменьшается надъ поверхностію земли въ обратномъ содержаніи квадратныхъ разстояній, то по причинѣ, что земной радіусъ $=$ 1432 милямъ, должно заключить, что тяжесть на высотѣ, отвѣчающей одной мили, будетъ содержаться къ тяжести при самой поверхности $= (1432)^2 : (1433)^2$ или $1 : 1,0014$; то есть, тяжесть на сей высотѣ уменьшится около $\frac{1}{700}$ доли; припомнимъ еще и то, что сіе уменьшеніе должно состояться и тогда, когда бы тѣло стало подниматься вертикально и достигло высочайшей точки по этому направленію.



О РАВНОВѢСІИ
И
ДВИЖЕНІИ
Въ Машинахъ.

---

550. Посредствомъ машинъ мы имѣемъ вообще предметомъ передавать дѣйствіе силъ.

Употребляя машины, мы не всегда имѣемъ цѣлію увеличивать движущую силу, дѣйствующую непосредственно на движимое; иногда бываетъ нужно дать только дѣйствію ея приличное направленіе: это видѣть можно изъ употребленія неподвижныхъ блоковъ. Въ другое же время имѣемъ въ виду заставить описывать движимое опредѣленныя пространства по извѣстнымъ условіямъ относительно ко времени или къ другимъ какимъ

нибудь обстоятельствамъ; эти условія не всегда требуютъ, чтобъ движущая сила въ передаваніи себя увеличивалась: примѣромъ этому служатъ часовыя машины.

551. Число и свойство машинъ бываетъ различно, глядя по различію занимаемыхъ насъ предметовъ. Однако не льзя сказать, чтобы нужно было разсматривать всѣ сіи машины подробно или порознь для опредѣленія дѣйствій ихъ. Какъ бы онѣ ни сложны и ни разнообразны были, но онѣ суть не другое что, какъ совокупленіе весьма ограниченнаго числа простыхъ машинъ.

Мы станемъ сначала трактовать о свойствахъ сихъ послѣднихъ. Потомъ покажемъ въ разныхъ примѣрахъ, какъ эти свойства должно употреблять при вычисленіи дѣйствій сложныхъ машинъ.

Мы ограничимъ число машинъ пятью, кои суть: *Веревки*, *Рычагъ*, *Блокъ*, *Воротъ и наклоненная Плоскость*.

Разсматривая машины относительно къ равновѣсію, можно бы число ихъ ограничить двумя и даже одною, а именно, *рычагомъ;* но относительно къ движенію ихъ, свойство

каждой требуетъ особливаго разсмотренія, и слѣд. нужно трактовать объ нихъ порознь.

О Веревкахъ.

552. Мы допустимъ сперва веревки тѣлами совершенно гибкими; потомъ обратимъ вниманіе на недостатокъ сей гибкости.

Мы также сначала будемъ разсматривать ихъ не имѣющими тяжести; а потомъ непосредственно съ оною.

По допущеніи сихъ двухъ вещей, не трудно примѣтишь, что каковъ бы ни былъ діаметръ веревокъ, большой или малой, но онъ ничего не значитъ въ сообщеніи силъ; и слѣд. можно всегда мысленно принимать вмѣсто веревокъ нитку, проходящую по оси цилиндра ихъ, и почитать, что передаваемая сила веревкѣ дѣйствуетъ посредствомъ той нитки.

553. Веревки или *канаты* передаютъ дѣйствіе силы непосредственно сами, или вмѣстѣ съ другими машинами, къ которымъ они привязываются. Но чтобъ удобнѣе судить о дѣйствіяхъ силъ, сообщенныхъ машинамъ посредствомъ канатовъ, то должно знать, какія

дѣйствія способны производить эти силы посредствомъ однихъ канатовъ.

554. Разсмотримъ сначала три силы P, Q, R (*фиг. 54*), дѣйствующія одна противъ другой канатами AP, AQ, AR, связанными узломъ A; и допустивъ, что направленія AP, AQ, AR извѣстны, опредѣлимъ тѣ условія, которыя нужны для равновѣсія и содержанія этихъ силъ.

Находимъ 1^е^, что всѣ онѣ должны быть въ одной плоскости. Когда жъ какая нибудь изъ нихъ, на примѣръ сила P, не будетъ въ плоскости двухъ другихъ, то можно всегда вообразить ее раздѣленною на двѣ другія, изъ которыхъ бы одна находилась въ той плоскости, а другая была бы къ ней перпендикулярна, и слѣд. перпендикулярна къ двумъ прочимъ силамъ P и Q; но эта перпендикулярная отнюдь не будетъ дѣйствовать къ сопротивленію ихъ, и слѣд. отнюдь не здѣлаетъ равновѣсія.

2^е^ По допущеніи всѣхъ трехъ силъ въ одной плоскости, надобно, для равновѣсія ихъ, чтобъ одна какая нибудь изъ нихъ, на примѣръ сила P, производила два усилія,

одно равное и противное силѣ Q, а другое равное и противное силѣ R.

Но естьли по продолженіи RA и QA, возьмемъ какую нибудь линею AD за силу P, и принявъ AD за діагональ, здѣлаемъ параллелограммъ ACDB, то два бока его AB и AC представятъ (193) двѣ силы, которыя дѣйствуя совокупно по направленіямъ QA и RA, должны производить одинакое дѣйствіе съ силою P. Слѣд. для равновѣсія сихъ трехъ силъ надобно, чтобъ Q равнялась BA, а R = CA, по предположеніи P равною AD; и слѣд. должно произойти такимъ пропорціямъ P : Q = AD : AB, и P : R = AD : AC, то есть, P : Q : R = AD : AB : AC. Таково должно быть содержаніе трехъ силъ P, Q, R, чтобъ имъ притти въ равновѣсіе.

555. Поелику двѣ силы Q и R должны равняться двумъ другимъ AB, AC, составляющимъ силу P, то можно заключить, что при равновѣсіи трехъ силъ, двѣ какія нибудь должны имѣть такое же содержаніе съ третьею, какое двѣ простыя силы съ сложною изъ нихъ.

556. И такъ по продолженіи PA до S, получимъ также (201) P : Q : R = *син.* BAC:

син. CAD : *син.* DAB, или *син.* RAQ : *син.* RAS : *син.* QAS; а это научаетъ, что *когда три силы дѣлаютъ равновѣсіе, то каждую изъ нихъ можно представить синусомъ угла, заключающагося между направленіями двухъ другихъ, въ случаѣ нужды продолженныхъ;* или *изъ трехъ силъ, дѣлающихъ равновѣсіе, каждую можно представить синусомъ того угла, сквозь которой проходитъ продолженное ея направленіе;* потому что углы RAP, QAP служатъ дополненіемъ ко 180° угламъ RAS, QAS, и слѣд. имѣютъ одинакой синусъ.

557. Хотя по допущеніи веревокъ совершенно гибкими и лишенными тяжести, казалось бы вообще, что длина ихъ не нужна для произведенія желаемаго дѣйствія; однакожъ много такихъ случаевъ, гдѣ непремѣнно должно имѣть вниманіе къ длинѣ ихъ.

На примѣръ, когда каменьщикъ взлѣзая по узловатому канату ABD, привязанному въ точкѣ A (*фиг.* 55), для починки дома, захочетъ отклониться въ право или въ лѣво отъ вертикала AE, то надобно для этого другому работнику потянуть къ себѣ простую веревку BC, посредствомъ которой перемѣняется положеніе узловатаго каната ABD; въ этомъ положеніи употребляемая сила работникомъ въ C содержится къ вѣсу каменьщика такъ = *син.* ABD : *син.* ABC (556), или по продолженіи вертикальной

линеи BO, $=$ *син.* ABO : *син.* ABC; но естьлибъ канатъ съ узлами былъ привязанъ не въ A, но въ A' ближе къ B, то сила, употребляемая въ таковомъ случаѣ работникомъ въ C, должна бы содержаться къ вѣсу каменьщика $=$ *син.* ABO : *син.* A'BC; и слѣд. не трудно примѣтить, что углы, ABC, A'BC будутъ здѣсь тупые, и *син.* A'BC будетъ меньше *син.* ABC. А какъ *син.* ABO меньше *син.* A'BO, то должно заключить, что работнику надобно употребить больше силы, когда канатъ будетъ привязанъ въ A', а меньше тогда, когда онъ будетъ привязанъ въ A.

Отсюда явствуетъ также, что работникъ, находящійся въ C, вообще употребитъ тѣмъ менѣе силы, чѣмъ длиннѣе будетъ канатъ BC.

558. Вотъ другой случай, гдѣ длина веревовъ не только что не помогаетъ, но и еще бываетъ невыгодна. Положимъ, что нужно взвезти повозку на гору KI (*фиг.* 56), и что первая пара лошадей достигла уже вершины I; естьли возмемъ AC за длину постромокъ, и на направленіи этой линеи часть AO, которою изобразимъ усиліе, употребляемое лошадью: то не трудно примѣтить что дѣйствіе влеченія по AO не все употребляется на поднятіе вверхъ повозки, потому что одна часть его дѣйствуетъ по направленію AB продолженной постромки AL, а другая по AH перпендикулярно къ оной; и слѣд. одна только сила AB будетъ служить для влеченія повозки, а сила по направленію AH будетъ напротивъ вредна, ибо она будетъ тянуть къ низу вторую пару лошадей. Естьли же вмѣсто постромки AC, возьмемъ другую длиннѣе, на примѣръ AG; въ такомъ случаѣ CD, GF будутъ равны между собою и высотою по грудь лошади; а по тому усиліе AO' бу-

дучи раздѣлено на два, какъ показано выше, произведетъ менѣе дѣйствія по направленію AB, чѣмъ по направленію AH′; ибо сила по AO содержится къ силѣ по AH въ первомъ случаѣ = *син.* BAH : *син.* BAO, или AO : AH = *син.* BAH : *син.* BAO, а во второмъ AH′ : AO′ или AO = *син.* BAO′ : *син.* BAH′ или *син.* BAH; отсюда слѣдуетъ заключить, что AH′ : AH = *син.* BAO′ : *син.* BAO. И такъ сила, которая тянетъ къ низу вторую пару, увеличивается по мѣрѣ длины постромокъ.

559. Поелику три силы P, Q, R (*фиг.* 54), долженствующія здѣлать равновѣсіе, представляются чрезъ AD, AB, AC, или (все равно) чрезъ бока AD, AB, BD треугольника ABD, котораго углы ABD, BDA, DAB равные угламъ CAQ, RAS, QAS, опредѣляющимъ направленія этихъ силъ; то явствуетъ, что всѣ вопросы, предлагаемые о сысканіи величины и направленіи силъ, рѣшатся по Тригонометріи.

На примѣръ естьли по даннымъ величинамъ трехъ силъ P, Q, R надобно будетъ сыскать направленія ихъ при равновѣсіи; то рѣши (*Геом.* 308) такой треугольникъ DBA, котораго три бока извѣстны, и найденные углы по рѣшеніи покажутъ собою направленія искомыхъ силъ.

Когдажъ даны будутъ двѣ силы P и Q и уголъ PAQ ихъ направленій или дополненіе его QAS = DAB; тогда по извѣстнымъ двумъ бокамъ AD, AB, и заключающемуся между ими углу DAB опредѣли

(*Геом.* 310) DB или величину силы R и уголЪ DBA, которому равный SAR представитЪ вЪ бокахЪ своихЪ направленія силЪ R и P.

НаконецЪ естьли даны будутЪ углы направленій трехЪ силЪ; то хотя не можно (*Геом.* 271) опредѣлить совершенной величины трехЪ силЪ, можно однакожЪ означить содержаніе ихЪ. ТакимЪ же образомЪ рѣши вопросЪ сей (559) и во всякихЪ другихЪ случаяхЪ, какЪ скоро будутЪ даны три какія нибудь вещи.

560. Естьли вмѣсто двухЪ силЪ Q и R, дѣйствующихЪ посредствомЪ двухЪ концовЪ веревки, будутЪ даны сами концы, привязанные вЪ Q и R или во всякой другой точкѣ ихЪ направленія; то AB, AC изобразятЪ вЪ такомЪ случаѣ усилія, переносимыя этими неподвижными точками.

561. Мы предположили (*фиг.* 54) узелЪ A, связывающій три конца, неподвижнымЪ; но ежели сила P (*фиг.* 57) будетЪ сообщена такому концу, который держится на веревкѣ QAR посредствомЪ кольца, то не можно уже болѣе ограничить направленія трехЪ силЪ. Ибо не довольно вЪ такомЪ случаѣ, чтобЪ усиліе AB было направлено по QA и равнялось силѣ Q, и тоже самое здѣлало усиліе AC вЪ разсужденіи R; но надобно еще, чтобЪ и кольцо не скользи-

ло по веревкѣ QAR ; а это требуетъ, чтобъ уголъ QAS былъ равенъ SAR, то есть. сила P должна имѣть такое направленіе, которое бы всегда дѣлило уголъ QAR на двѣ равныя части. Впрочемъ мы получаемъ всегда $P : Q : R =$ *син.* QAR : *син.* SAR : *син.* QAS ; А какъ $SAR = QAS = \frac{1}{2}QAR$, то предыдущія содержанія превращаются въ слѣдующія $P : Q : R =$ *син.* QAR : *син* $\frac{1}{2}$QAR : *син.* $\frac{1}{2}$QAR. Такимъ образомъ силы R и Q выходятъ обѣ равны.

562. Естьли веревка QAR, вмѣсто того чтобъ ее тянуть двумя силами Q и R, будетъ привязана въ двухъ неподвижныхъ точкахъ Q и R (*фиг.* 58); то и тутъ произойдетъ тоже. Равновѣсіе состоится тогда, когда сила P раздѣлитъ уголъ QAR на двѣ равныя части; а поелику двѣ неподвижныя точки Q и R способны здѣлать всякое сопротивленіе, то силу P можно полагать такой величины, какой угодно.

563. Естьли вообразимъ, что сила P будетъ тянуть веревку QAR относительно къ двумъ неподвижнымъ точкамъ Q и R концомъ AP посредствомъ скользящаго кольца; то точка A должна списать при семъ движеніи (*Алг.* 225) эллипсисъ, котораго фокусами будутъ точки Q и R, а большою осью BC равная QAR. Но мы видѣли (*Алг.* 235), что перпендикуляръ, проведенной къ сей кривой линеи, раздѣляетъ уголъ QAR на двѣ равныя части; слѣд. можно утвердить, что въ какомъ бы положеніи веревка QAR ни находилася, сила P здѣлаетъ равновѣсіе тог-

да, когда она будетЪ тянуть по направленію перпендикулярному кЪ точкѣ A эллипсиса BAC.

564. Естьли сила P будетЪ представлена вѣсомЪ (*фиг.* 59); то этотЪ вѣсЪ можетЪ здѣлать равновѣсіе вЪ одномЪ только положеніи, которое будетЪ находиться вЪ такой точкѣ A эллипсиса, гдѣ тангенсЪ его будетЪ горизонталенЪ. И такЪ для опредѣленія положенія сей точки, вЪ которой вѣсЪ P придетЪ вЪ равновѣсіе, должно начертить эллипсисЪ BAC; потомЪ продолживши горизонтальной діаметрЪ HS, провести кЪ эллипсису тангенсЪ параллельный сЪ тѣмЪ діаметромЪ, или такой, которой бы здѣлалЪ сЪ ордонатою AQ уголЪ равный дополненію кЪ 90° HDB; но это не трудно здѣлать по предписанному (32).

565 Естьли веревка RAQ, которую тянутЪ двѣ силы R и Q (*фиг* 60), будетЪ проходить выше неподвижной точки A; то обѣ силы должны быть одинаковы, и тнѣтеніе, производимое ими на эту неподвижную точку; имѣетЪ направленіе по линеи, раздѣляющей уголЪ QAR на двѣ равныя части; это давленіе вЪ разсужденіи каждой силы R и Q содержится, какЪ синусЪ QAR кЪ синусу половины его.

566. Выразумѣвши все предыдущее, можемЪ теперь безЪ всякаго труда опредѣлять условія, нужныя для равновѣсія между произвольнымЪ числомЪ силЪ, которыя сообще-

ны будутЪ разнымЪ концамЪ, связаннымЪ между собою однимЪ узломЪ или разными.

567. ДопустимЪ сперва, что каждой узелЪ соединяетЪ вЪ себѣ три конца, и что всѣ силы дѣйствуютЪ вЪ одной плоскости, какЪ то изображаетЪ (*фиг.* 61). ВотЪ какЪ должно разсуждать о равновѣсіи, и выводить содержанія силЪ.

P дѣлаетЪ усиліе противу двухЪ концовЪ AT, AB. И такЪ продолживЪ направленія ихЪ, и представивЪ чрезЪ AF силу P, начертимЪ по AF какЪ по діагонали параллелограммЪ ADFE, употребивЪ боками его проложенія AE, AD. ВЪ сходственность чего усиліе T, переносимое крюкомЪ, изобразится чрезЪ AE, а напряженіе конца BA чрезЪ AD; такЪ что представивЪ это напряженіе чрезЪ *a*, будемЪ имѣть P : T : *a* = AF : AE : AD, или P : T : *a* = *син.* DAE : *син.* FAD : *син.* FAE, или P : T : *a* = *син.* TAB : *син.* PAB : *син.* TAP.

ПоложимЪ, что усиліе AD передано вЪ B по BI равно и вЪ прямомЪ направленіи сЪ AD; такимЪ образомЪ BI будетЪ употреблять свою силу противЪ Q и противЪ конца BC; слѣд. продолживЪ по означенному

выше концы BQ и CB, и здѣлавъ параллелограммъ GBHI, получимъ въ BH величину силы Q, а въ BG напряженіе конца CB. Представивъ чрезъ *b* это напряженіе, будемъ имѣть также *a* : Q : *b* = *син.* GBH : *син.* IBG : *син.* IBH, или *a* : Q : *b* = *син.* QBC : *син.* ABC : *син.* ABQ.

Вообразимъ также, что усиліе BG сообщено въ C по CK равно и въ прямой линеѣ съ BG; CK будетъ дѣлать усиліе противъ S и R. И такъ по продолженіи RC и SC, и по составленіи параллелограмма MCLK, CM изобразитъ величину силы R, а CL величину силы S; и по той же причинѣ получимъ *b* : R : S = *син.* MCL : *син.* KCL : *син.* MCK, или *b* : R : S = *син.* RCS : *син.* BCS : *син.* BCR.

Естьли жъ захотимъ теперь узнать непосредственно содержаніе напряженія T какой нибудь части TA веревки, къ напряженію другой ея части, на примѣръ CS; то весьма легко можемъ найти его такъ.

Изъ означенныхъ выше содержаній возьмемъ только тѣ, которыя относятся къ напряженіямъ частей веревки TABCS.

$$T : a = \text{син. PAB} : \text{син. TAP};$$
$$a : b = \text{син. QBC} : \text{син. ABQ};$$
$$b : S = \text{син. RCS} : \text{син. BCR}$$

Умноживъ ихъ по порядку, выведемъ $T : S = \text{син. PAB} \times \text{син. QBC} \times \text{син. RCS} : \text{син. TAP} \times \text{син. ABQ} \times \text{син. BCR}$. Когда жъ надобно имѣть содержаніе напряженія T къ напряженію b, то должно въ такомъ случаѣ умножить только двѣ первыя пропорціи; и такъ и проч.

Ежели захотимъ знать содержаніе силъ между собою; то стоитъ только изъ предыдущихъ содержаній вывести содержаніе двухъ послѣдовательныхъ силъ къ напряженію заключающагося между ими каната; и мы будемъ имѣть

$$P : A = \text{син. TAB} : \text{син. TAP};$$
$$a : Q = \text{син. QBC} : \text{син. ABC};$$
$$Q : b = \text{син. ABC} : \text{син. ABQ}$$
$$b : R = \text{син. RCS} : \text{син. BCS}.$$

Умноживъ сіи четыре пропорціи по порядку, будемъ имѣть по приведеніи $P : R = \text{син. TAB} \times \text{син. QBC} \times \text{син. RCS} : \text{син. TAP} \times \text{син. ABQ} \times \text{син. BCS}$. Желая же

знать содержаніе P къ Q, умножъ двѣ первыя только.

Отсюда явствуетъ, какъ должно поступать съ большимъ числомъ силъ при сравненіи ихъ съ напряженіями частей веревки.

568. Естьли силы P, Q, R раздѣлятъ по поламъ углы TAB, ABC и проч., то углы TAP, PAB, такъ какъ и углы ABQ, QBC здѣлаются равны. Отсюда и изъ предыдущихъ содержаній можно заключить, что всѣ части веревки TABCS имѣютъ одинакое напряженіе.

569. Ежели вмѣсто силъ P, Q, R (*фиг.* 61), употреблены будутъ неподвижныя точки A, B, C (*фиг.* 62); то давленіе (565), производимое напряженіемъ конечныхъ частей веревки на эти неподвижныя точки, будетъ имѣть такое направленіе, которое будетъ дѣлить сходственный уголъ по поламъ, и напряженія всѣхъ частей TA, AB и проч. веревки TABCS будутъ равны (568). Слѣд. ежели (*фиг.* 63) двѣ силы T и S будутъ тянуть веревку по окруженію многоугольника или по какой нибудь кривой линеи, то напряженіе будетъ всюду равно сообщено, и слѣд. обѣ силы должны быть равны.

570. Когда концы, сходящіеся вЪ одну точку и расположенные вЪ одной плоскости, будутЪ числомЪ болѣе трехЪ, или расположенные вЪ разныхЪ плоскостяхЪ будутЪ числомЪ болѣе четырехЪ; тогда, хотя бы и даны были направленія сихЪ концовЪ, не можно опредѣлить совершенно ни содержанія силЪ ни напряженія концовЪ, то есть, ежели нѣкоторое число силЪ (ниже упомянутаго) здѣлаетЪ равновѣсіе по извѣстнымЪ направленіямЪ, то можно его замѣнить такимЪ же числомЪ другихЪ силЪ, имѣющихЪ одинакое сЪ прежними направленіе, но различныя содержанія, и притомЪ сіи послѣднія силы здѣлаютЪ также равновѣсіе.

На примѣрЪ положимЪ, что четыре конца AP, AQ, AR, AS, (*фиг. 64*) направлены вЪ одной плоскости; и такЪ взявЪ часть AB для представленія ею силы P, и продоляживЪ конецЪ SA до C, вообразимЪ усиліе AB раздѣленнымЪ на два другія AC, AD, изЪ которыхЪ бы первое было равно и противуположно силѣ S; послѣ чего не можно никакЪ опредѣлить направленія AD дѣйствія, долженствующаго противуполагаться сложному усилію изЪ двухЪ Q и R; не можно никакЪ, говорю я, опредѣлить сего направленія, кромѣ того, что по продолженіи своемЪ оно должно проходить вЪ

угл҃ QAR; но это такое условіе, которое, какъ легко примѣтить, можно выполнить разными и безчисленными образами. Въ сходственность чего взявши направленіе AD произвольно, но съ упомянутымъ условіемъ, здѣлаемъ параллелограммъ ACBD, которому діагональю будетъ служить AB, а боками направленія AC, AD, потомъ здѣлаемъ равномѣрно параллелограммъ AEDF, котораго діагональю примемъ AD, а продолженія AE, AF направленій двухъ силъ Q и R боками; ясно увидимъ, что по представленіи величины P чрезъ AB, можно принять AC за величину S, AF за R и AE за Q, потому что дѣйствіе силы AB одинаково съ двумя силами AC, AD, изъ которыхъ первой, для равновѣсія съ S, надобно быть = S; чтожъ касается до другой AD, то она производитъ одинакое дѣйствіе съ двумя силами AF, AE, которымъ, для равновѣсія съ R и Q, нужно въ особенности равняться этимъ послѣднимъ силамъ. Но примѣчаемъ въ тоже время, что давши AB совсѣмъ другую величину, и удержавъ направленія S, Q и R тѣже, получимъ въ AD, AF и AE совсѣмъ иныя величины, такія однакожъ, которыя отнеся къ силамъ, на направленіяхъ которыхъ онѣ находятся, найдемъ, что эти силы здѣлаютъ равновѣсіе. И такъ въ настоящемъ случаѣ можно

привести силы въ равновѣсіе, и совсѣмъ тѣмъ направленія ихъ останутся одинаковы.

571. Тожъ самое доказано будетъ, когда концы, связанные однимъ узломъ и расположенные въ разныхъ плоскостяхъ, будутъ числомъ болѣе четырехъ. Но ежели ихъ числомъ будетъ только четыре, то по даннымъ направленіямъ содержаніе силъ, сообщенныхъ этимъ концамъ, можно опредѣлить.

Ибо по двумъ какимъ нибудь изъ нихъ AP, AS (*фиг. 65*), можно всегда вообразить такую плоскость, которая будучи достаточно продолжена, пересѣчетъ плоскость RAQ двухъ прочихъ по какой нибудь линеѣ DAE, которой положеніе опредѣляется направленіями четырехъ силъ. Естьли продолжимъ направленіе SA и потомъ взявши AB, для представленія ею силы P, здѣлаемъ по AB и по направленіямъ AD, AC параллелограммъ DACB, то получимъ въ AC величину силы S, а въ AD величину упорства, которую сила P употребляетъ противу двухъ силъ Q и R дѣйствующихъ совокупно. Равномѣрно продолживъ QA и RA, находящіяся въ одной плоскости съ AD, здѣлаемъ по AD какъ по діагонали и по продолженіямъ AF, AG парал-

делограммѣ AFDG, опредѣлимѣ вѣ AF, AG величины, которыя нужно дать силамѣ Q и R.

579. Впрочемѣ какѣ бы то ни случилось, будутѣ ли концы расположены вѣ одной плоскости, или нѣтѣ; но какѣ равновѣсіе требуетѣ, чтобѣ каждой узелѣ оставался неподвиженѣ; то по раздѣленіи силы или напряженія каждаго конца, оканчивающагося у одного и тогожѣ узла, на три другія перпендикулярныя между собою, или параллельныя сѣ тремя прямыми также перпендикулярными взаимно, должно произойти (233) для каждаго узла суммѣ силѣ, параллельныхѣ сѣ каждою изѣ тѣхѣ линей, равной нулю (памятуя твердо, что подѣ *суммою* мы разумѣемѣ сумму силѣ, дѣйствующихѣ вѣ одну сторону безѣ суммы силѣ дѣйствующихѣ вѣ противную). Естьли концы, сходящіеся вѣ одномѣ узлѣ, будутѣ находиться вѣ одной плоскости, то довольно вѣ такомѣ случаѣ раздѣлить силу на двѣ другія параллельныя сѣ двумя взаимно перпендикулярными и проведенными вѣ тойже плоскости. По сему правилу можно находить всякое условіе для равновѣсія, когда концы будутѣ связаны неподвижнымѣ узломѣ.

573. Чтобы показать это въ простомъ примѣрѣ, то положимъ, что надобно опредѣлить содержанія трехъ силъ, дѣлающихъ равновѣсіе посредствомъ трехъ концовъ, связанныхъ однимъ узломъ (*фиг.* 66).

Допустимъ на время, AG, AB, AF такими линеями, которыя могутъ представлять сіи три силы; и чтобъ менѣе дѣлать раздѣленій, то раздѣлимъ каждую изъ двухъ силъ Q и R, какъ явствуетъ изъ фигуры, на двѣ другія, изъ которыхъ первую проведемъ по направленію P, а другую перпендикулярно къ этому направленію. Тогда въ прямоугольныхъ треугольникахъ BAC, FAI, положивъ радіусъ равнымъ 1, будемъ имѣть BC = AD = AB *син.* QAC; FI = AE = AF × *син.* RAC; AC = AB *кос.* QAC; AI = AF *кос.* FAI. И такъ по предписанному правилу получимъ AB *син.* QAC — AF *син.* RAC = о, и AB *кос.* QAC + AF *кос.* RAC — AG = о. По первому уравненію выводимъ AB *син.* QAC = AF *син.* RAC, и слѣд. получаемъ AB : AF = *син.* RAC : *син* QAC, то есть, Q : R, = *син.* RAC : *син.* QAC, но это въ точности сходствуетъ съ доказаннымъ (556).

Естьли изъ перваго уравненія выведемъ величину AF и вставимъ ее во второмъ, то будемъ имѣть AB *кос.* QAC + ...

$$\frac{AB\ кос.\ RAC\ син.\ QAC}{син.\ RAC} - AG = o,$$ или AB *кос.* QAC *син.* RAC + AB *кос.* RAC *син.* QAC = AG *син.* RAC. Но (*Геом.* 286) *кос.* QAC *син.* RAC + *кос.* RAC *син.* QAC = *син.* (QAC + RAC) = *син.* QAR; слѣд. AB *син.* QAR = AG *син.* RAC, а изъ этого выходитъ AB : AG = *син.* RAC : *син.* QAR, или Q : P = *син.* RAC : *син.* QAR, что также сходствуетъ съ доказаннымъ (556).

574. Посмотримъ теперь, какую отмѣну имѣетъ тяжесть веревокъ при сообщеніи дѣйствія силъ.

Положимъ (*фиг.* 67), что произвольное число силъ дѣйствуетъ на одну веревку безъ тяжести TABCS, которую за концы будутъ тянуть двѣ силы T и S, или удерживать двѣ неподвижныя точки T и S.

Ежели продолжимъ двѣ крайнія части ея TA, SC до пересѣченія ихъ въ V, то явствуетъ, что упорность, происходящая изъ частныхъ напряженій сихъ двухъ концовъ, должна пройти по этой точкѣ V. А поели-

ку мы допускаемЪ равновѣсіе, то составная сила изЪ трехЪ P, Q и R и напряженія двухЪ среднихЪ частей веревки AB и BC должна также пройти по точкѣ V; потому что по допущеніи равновѣсія она должна быть равна и вЪ прямой линеѣ противуположна сЪ составнымЪ напряженіемЪ двухЪ концовЪ TA и CS. Но составная изЪ трехЪ силЪ и напряженія двухЪ среднихЪ частей веревки есть таже самая, какая выходитЪ только изЪ трехЪ силЪ, потому что среднія части AB и BC не имѣютЪ сами по себѣ никакого дѣйствія на систему. Слѣд. составная сила изЪ всѣхЪ P, Q, R, дѣйствующихЪ на веревку проходитЪ по продолженію V двухЪ крайнихЪ концовЪ.

575. Мы видѣли (197 и слѣд.), какЪ должно опредѣлить составную или сложную силу. Но ежели концы AP, BR, CR и проч. будутЪ параллельны, какЪ то всегда случается, когда на нихЪ будутЪ повѣшены тяжести; то поелику сложная сила должна быть также сЪ ними параллельна, направленіе ея опредѣляется весьма просто: а именно, должно провести чрезЪ точку V параллель сЪ какимЪ нибудь направленіемЪ сихЪ тяжестей, то есть, должно провести вертикальную линею.

576. И такъ допустимъ (*фиг.* 68) произвольное число тяжестей, повѣшенныхъ на одной веревкѣ, которой самой не полагаемъ никакой тяжести. Въ сходственность сказаннаго продолживъ оба конца до пересѣченія ихъ въ V, и чрезъ эту точку вертикалъ VX, можно умственно подчинить равновѣсіе всей системы равновѣсію трехъ силъ, сообщенныхъ тремъ концамъ, соединяющимся въ узлѣ V, гдѣ сила, имѣющая направленіе по XVZ состоитъ изъ суммы всѣхъ вѣсовъ. Отсюда и изъ сказаннаго (556) заключимъ, что напряженіе T къ напряженію S содержится, какъ синусъ XVS къ синусу TVX.

577. Естьли теперь представимъ себѣ тяжелую веревку совокупленіемъ безчисленнаго множества маленькихъ вѣсовъ однообразно раздѣленныхъ по оси ея; то явствуетъ, что по представленіи точки, гдѣ сила сообщена веревкѣ, чрезъ S (*фиг.* 69), а чрезъ T того мѣста, гдѣ она привязана къ машинѣ, дѣйствіе, производимое силою на точку T, передается по тангенсу TV кривой линеи или по отлогости веревки, происходящей отъ ея тяжести; что это дѣйствіе будетъ равно дѣйствію силы S тогда только, когда вертикалъ, проведенный изъ

точки стеченія V двухъ конечныхъ тангенсовъ, раздѣлитъ уголъ TVS пополамъ; и что вообще то дѣйствіе силы S, которое она способна передать посредствомъ нетяжелой веревки, содержится къ дѣйствію ея посредствомъ тяжелой такъ, какъ синусъ TVX къ синусу SVX.

578. Замѣтимъ здѣсь, что выражаясь по всей строгости, должно утвердить, что какая бы сила ни была употреблена, но никогда не можно натянуть веревки совершенно прямо, кромѣ въ вертикальномъ положеніи ея.

Въ самомъ дѣлѣ положимъ, что веревку RAP (*фиг.* 70), не имѣющую тяжести, держитъ вѣсъ Q посредствомъ двухъ равныхъ силъ P и R, которыхъ направленія составляютъ уголъ весьма близко подходящій ко 180°. Въ сходственность сказаннаго (556) будемъ имѣть Q : P = CAD : *син.* CAB, или (по продолженіи DA) = *син.* CAS : *син.* $\frac{1}{2}$ CAD; а какъ по положенію уголъ CAS безконечно малъ, и $\frac{1}{2}$ CAD безконечно близко подходитъ къ прямому углу, и потому Q должно быть количество безконечно малое въ разсужденіи P; и такъ при безконечно маломъ вѣсу Q двѣ части веревки дѣлаютъ всё таки уголъ.

Слѣд. можно заключить отсюда, что весьма малая сила Q производитЪ весьма большое напряженіе вЪ частяхЪ веревки AP, AR, когда уголЪ RAP будетЪ слишкомЪ тупЪ.

579. ЭтимЪ же самымЪ не трудно объяснить, почему дуя чрезЪ небольшую трубку Aa (*фиг.* 71) вЪ пузырь или вЪ какой нибудь мѣхЪ *a*EBC*a*, на концѣ B котораго привязана тяжесть P, посредственнымЪ дуновеніемЪ можно поднять сію тяжесть P, хотя бы она была довольно велика.

Ибо можно почитать каждую половину *a*CB, *a*EB вертикальнаго сѣченія сего пузыря веревкою, которую вЪ каждой точкѣ поднимаетЪ перпендикулярная сила (297) *равная* тому давленію, которое внутренній воздухЪ производитЪ на стѣны пузыря. Сложное давленіе изЪ всѣхЪ сихЪ частныхЪ должно (574) имѣть направленіе по FED, то есть, проходить по стеченію тангенсовЪ, проведенныхЪ кЪ концамЪ той веревки, и оно должно содержатся кЪ усилію по BD = *син.* *a*DB или *син.* *a*D*u* : *син.* FD*a*. А какЪ уголЪ *a*D*u* весьма малЪ, то самое малое усиліе по направленію FD производитЪ весьма большое по BD; по той же причинѣ давленіе, здѣланное на *a*EB произведетЪ очень большое усиліе по BF; и слѣд. тяжесть P будутЪ кЪ себѣ тянуть двѣ весьма большія силы по BD, BF, и которыя тѣмЪ болѣе окажутЪ дѣйствія, чѣмЪ уголЪ FBD будетЪ меньше, потому что сложное изЪ нихЪ усиліе по мѣрѣ этого болѣе и болѣе подходитЪ кЪ суммѣ ихЪ.

О простыхъ и сложныхъ Блокахъ.

580. Фигура блока довольно всякому извѣстна; и потому мы почитаемъ излишнимъ описывать ее.

Разные виды блоковъ можно отнести къ двумъ: первой составляютъ *неподвижные*, а другой *подвижные блоки.*

Неподвижнымъ блокомъ называется тотъ (*фиг.* 72 и 73), въ которомъ сила и тяжесть или препятствіе, которое сила должна преодолѣть, находятся обѣ на касательныхъ направленіяхъ къ окружности блока.

Подвижной блокъ (*фиг.* 74 и 75) есть тотъ, въ которомъ тяжесть или препятствіе находится при центрѣ или на направленіи, проходящемъ чрезъ центръ или по оси блока.

581. Разсматривая блокъ вообще, замѣчаемъ, что эта машина причастна двумъ родамъ движенія, изъ которыхъ одно такое, по силѣ коего веревка, проходящая по жолобу колеса, перемѣняетъ мѣсто, не причиняя никакой перемѣны самому блоку; а другое есть то, по которому самъ блокъ перемѣняетъ свое положеніе. И такъ равновѣсіе въ сей

машинѣ подчинено двумъ условіямъ совершенно различнымъ: по первому напряженія обоихъ концовъ веревки должны взаимно себя уничтожать, и слѣд. должны быть равны, какая бы впрочемъ кривизна блока ни была (569); второе условіе выводится изъ сего перваго слѣдующимъ образомъ.

582. Изъ напряженій обоихъ концовъ веревки, проходящей по колесу, выходитъ на самую машину такое усиліе, которое опредѣляемъ, взявши на направленіяхъ концовъ веревки, разумѣя отъ точки сѣченія ихъ, (*фиг.* 72, 73 и 74) равныя части IA, IB и здѣлавъ параллелограммъ IADB; по этому чертежу діагональ ID представитъ усиліе на самой блокъ, по допущеніи, что IA изображаетъ напряженіе конца OP (*фиг.* 72 и 73), или OG (*фиг.* 74). Но по причинѣ тангенсовъ IR, IO и равенства линей IB, IA, не трудно примѣтить, что продолженіе ID будетъ проходить чрезъ центръ C блока. И такъ естьли колесо будетъ постоянно утверждено, то усиліе ID не прежде можетъ уничтожиться, пока препятствіе, долженствующее остановить движеніе блока, не будетъ расположено на какой нибудь точкѣ линеи IC, проходящей чрезъ центръ C и чрезъ точку

стеченія концовъ веревки. Въ сходственность чего ежели колесо будетъ вертѣться въ обоймѣ CG, которая привязана въ точкѣ G (*фиг.* 73), и которая можетъ сама свободно обращаться около этой точки, то равновѣсіе произойдетъ тогда только, когда обойма приметъ положеніе по направленію CI.

Равномѣрно естьли блоковое колесо будетъ ходить по веревкѣ, привязанной въ точкѣ G (*фиг.* 74), то равновѣсіе состоится тогда, когда усиліе, переданное центру C или обоймѣ, укрѣпленной въ этомъ центрѣ, раздѣлитъ пополамъ уголъ составленный изъ концовъ, OG, RQ, и когда это усиліе къ каждому изъ концовъ OG, RQ будетъ содержаться = ID : IA : IB.

583. Послѣ сего не трудно найти содержаніе напряженій каждаго конца веревки, проходящей по блоку къ усилію, которое происходитъ на колесо какъ въ неподвижномъ, такъ (*фиг.* 74) и въ подвижномъ блокахъ.

По представленіи напряженія каждаго конца линеею IA или равною ей IB, а усилія на колесо чрезъ ID, въ треугольникѣ IAD получаемъ IA : ID = *син.* IDA : *син.* IAD,

или *син.* CIQ : *син.* OAD или *син.* PIQ; слѣд. можно вообще утвердить, что *при равновѣсіи неподвижнаго или подвижнаго простаго блока, 1е. напряженія обоихъ концовъ веревки или сообщенныя имъ силы бываютъ равны; 2е каждая изъ этихъ силъ содержится къ усилію на центръ блока, какъ синусъ половины угла, заключающагося между обоими концами, къ синусу цѣлаго угла.*

И такъ въ неподвижномъ блокѣ (*фиг.* 72 и 73) сила Q не имѣетъ другой выгоды, кромѣ что можетъ по произволу перемѣнять направленіе своего дѣйствія. Чтожъ касается до подвижнаго (*фиг.* 74 и 75); то сила Q имѣетъ двойную выгоду: вопервыхъ она можетъ перемѣнять направленіе свое, и вовторыхъ увеличивать себя. Но надобно примѣчать, что по мѣрѣ перемѣны въ направленіи, усиліе дѣйствующее на центръ перемѣняется также; такимъ образомъ выходитъ такое направленіе, гдѣ это усиліе бываетъ самое большое, и именно, когда оба конца OG, RQ становятся параллельны, что мы теперь и намѣрены разсмотрѣть.

584. Естьли проведемъ радіусы OC, CR (*фиг.* 74) и хорду OR, то треугольникъ

OCR по причинѣ перпендикулярности боковъ своихъ къ бокамъ треугольника BID, будетъ сему послѣднему подобенъ; и слѣд. получимъ IB : ID = CR : OR, то есть, Q : P = CR : OR. И такъ вообще *напряженіе какого нибудь конца содержится къ усилію переносимому центромъ, какъ радіусъ блоки къ хордѣ дуги, обѣхатываемой веревкою.*

Но явствуетъ, что это послѣднее содержаніе есть самое большое, и становится = 1 : 2, когда концы бываютъ параллельны (*фиг.* 75); и такъ въ подвижномъ блокѣ сила самая малая бываетъ тогда, когда концы параллельны; она равняется тогда половинѣ вѣса, поддерживаемаго центромъ блока.

585. До сихъ поръ мы приписывали равновѣсіе той силѣ, которая выходящее изъ стеченія двухъ силъ, сообщенныхъ касательно къ окружности блока, единственное усиліе уничтожаетъ; она въ неподвижномъ блокѣ (*фиг.* 72) состоитъ изъ сопротивленія оси, которая предполагается непоколебимою, или изъ сопротивленія обоймы (*фиг.* 73); или наконецъ въ подвижномъ (*фиг.* 74) изъ сопротивленія тяжести, равной и прямо противоположной ему.

А поелику въ этой машинѣ одна только сила дѣйствуетъ, а тяжесть и усиліе, сообщенныя обоймѣ, служатъ только сопротивленіемъ; то, кажется, естественнѣе можно раздѣлить дѣйствіе силы на два усилія, изъ которыхъ одно равно и прямо противоположно другому прикосновенному концу, а другое равно и прямо противоположно усилію, которое сообщается центру блока.

Напримѣръ, естьли въ неподвижномъ блокѣ (*фиг.* 76) и подвижномъ (*фиг.* 77) взявши на направленіи AQ силы Q, считая отъ точки A стеченія ея съ продолженіемъ конца AF, какую нибудь часть AB, и представивъ ею силу Q, здѣлаемъ по AB, какъ по діагонали, параллелограммъ ADBI, котораго бы бока AI, AD находились на продолженіи FA, и на линеѣ AC продолженной отъ точки стеченія A къ центру C; то можно представить силу Q раздѣленною на два усилія AI, AD. А какъ допускаемъ равновѣсіе, то должно усилію AI равняться напряженію конца FP (*фиг.* 76) или FG (*фиг.* 77), и усилію AD равняться тому, которое переноситъ центръ (*фиг.* 76), или должно равняться тяжести P (*фиг.* 77); но по правиламъ раздѣленія (201) получаемъ AB : AD : AI = *син.* DAI : *син.* BAI : *син.* BAD, или =

син. FAC : *син.* FAE : *син.* EAC, но это въ точности сходствуетъ съ показаннымъ (583).

И вообще будемъ ли мы принимать равновѣсіе выходящимъ изъ сложенія силъ, или почитать его дѣйствіемъ раздѣленія ихъ, въ обоихъ случаяхъ найдемъ тожъ содержаніе.

Ежели концы веревки (*фиг.* 75) будутъ параллельны, то раздѣли силу Q на двѣ параллельныя CB и OI по объявленному (208).

586. Почему естьли сила Q будетъ поддерживать тяжесть P (*фиг.* 78) посредствомъ многихъ подвижныхъ блоковъ, которыхъ веревки однимъ концомъ будутъ привязаны къ неподвижной точкѣ, а другимъ касаться обоймы ближняго блока; то содержаніе силы къ тяжести будетъ состоять изъ произведенія радіусовъ всѣхъ подвижныхъ блоковъ къ произведенію хордъ обнимаемыхъ веревками дугъ.

Ибо принявъ N и M за обремененія центровъ двухъ блоковъ N и M, которыя можно также принимать напряженіями двухъ концовъ привязанныхъ къ центрамъ N и M, и представивъ чрезъ r, r', r'' радіусы, а

чрезъ s, s', s'' хорды блоковъ N, M, L, получимъ (584) $Q : N = r : s$; $N : M = r' : s'$; $M : L$ или $P = r'' : s''$; послѣ чего умноживъ эти пропорціи по порядку и сократив общихъ факторовъ въ обоихъ членахъ перваго содержанія, будемъ имѣть $Q : P = rr'r'' : ss's''$. Когдажъ концы веревокъ будутъ между собою параллельны, тогда выходитъ $s = 2r$, $s' = 2r'$, $s'' = 2r''$, и слѣд. получаемъ $Q : P = rr'r'' : 2r \times 2r' \times 2r'' = 1 : 2 \times 2 \times 2$; а это показываетъ, что сила въ такомъ случаѣ содержится къ тяжести, какъ единица къ 2 возведенному въ степень числа подвижныхъ блоковъ; на примѣръ сила Q посредствомъ трехъ блоковъ можетъ поддерживать тяжесть въ восемь разъ больше величины своей.

587. Но такое расположеніе блоковъ не очень способно; преимущественнѣе всѣхъ другихъ употребляются слѣдущія (*фиг.* 79, 80, 81, 82, 83, 84); которыя называются *полиспастами* (Moufles). Они состоятъ изъ совокупленія многихъ блоковъ подвижныхъ и неподвижныхъ, изъ которыхъ всѣ ходятъ по одной веревкѣ. Подвижные и неподвижные блоки утверждаются въ особливыхъ обоймахъ. Иногда центры ихъ (*фиг.* 79, 80, 81 и 82) располагаются по разнымъ точкамъ обоймы,

а иногда (*фиг.* 83) всѣ лежатъ на одной оси.

588. Но какое бы разположеніе ни здѣлано было симъ центрамъ, можно всегда найти содержаніе силы къ тяжести по сему правилу: *сила содержится къ тяжести, какъ радіусъ или синусъ 90 градусовъ къ суммѣ синусовъ тѣхъ угловъ, которые составляетъ каждой конецъ веревки прикосновенный къ подвижному полиспасту, съ горизонтальною линеею.*

Ибо естьли на каждомъ концѣ веревки (*фиг.* 79 и 80) возьмемъ равныя части *im*, *np* и проч., и представивъ этими частями напряженіе ихъ, здѣлаемъ на каждой, принявъ ее за діагональ, параллелограммъ, котораго бы два бока были вертикальны, а другіе два горизонтальны; то можно, вмѣсто того чтобъ принимать тяжесть P непосредственно поддерживаемою напряженіями тѣхъ концовъ, почитать ее поддерживаемою стеченіемъ горизонтальныхъ силъ *ik*, *no* и проч. и вертикальныхъ вмѣстѣ *il*, *ng* и проч. А какъ первыя будучи перпендикулярны къ направленію дѣйствія тяжести, то онѣ ничего не дѣлаютъ въ разсужденіи сего дѣйствія, и слѣд. при равновѣсіи уничтожаются взаимно;

и потому тяжесть P поддерживается однимъ сопротивленіемъ, то есть, суммою вертикальныхъ силъ il, nq и проч. Но въ прямоугольныхъ треугольникахъ iml, nqp и проч. получаемъ $im : il = 1 :$ *син.* iml; np или $im : nq = 1 :$ *син.* npq и такъ далѣе; слѣд. $il = im$ *син.* iml; $nq = im$ *син.* npq; и слѣд. наконецъ заключимъ, что $Q : P = im : im$ *син.* iml + im *син.* npq + и проч., или = $1 :$ *син.* iml + *син.* npq + и проч.

589. Естьли концы будутъ параллельны и слѣд. вертикальны, то углы iml, npq и проч. здѣлаются прямыми, и слѣд. синусъ каждаго будетъ равенъ радіусу 1. Слѣд. сила въ такомъ случаѣ содержится къ тяжести, какъ 1 къ суммѣ столькихъ единицъ, сколько касается концовъ къ подвижному полиспасту. Отсюда явствуетъ, что *ежели веревка однимъ концомъ будетъ привязана къ неподвижному полиспасту* (фиг. 81), *то сила содержится къ тяжести, какъ единица къ удвоенному числу блоковъ подвижнаго полиспаста. Естьли же веревка будетъ привязана концомъ къ подвижному полиспасту* (фиг. 82), *то сила къ тяжести содержится, какъ единица къ удвоенному числу блоковъ подвижнаго полиспаста, увеличенному единицею.*

590. Доказанное нами общее правило имѣетъ свою силу, будутъ ли концы веревки находиться въ одной плоскости, или будутъ расположены по разнымъ плоскостямъ. Оно имѣетъ свою силу также и тогда, когда препятствіе, преодолѣваемое полиспастами, не будетъ состоять изъ тяжести, то есть, когда цѣлое усиліе полиспаста не будетъ вертикально; стоитъ только вставить вмѣсто угловъ, которые допущали мы концы дѣлающими съ горизонтальною плоскостію, другіе, которые тѣже концы здѣлаютъ съ перпендикулярною. На примѣръ въ *фигурѣ* 84 сила Q содержится къ усилію въ G, какъ радіусъ къ суммѣ синусовъ угловъ, составляемыхъ каждымъ концомъ прикосновеннымъ къ полиспасту EF, съ перпендикулярною плоскостію къ FG.

591. Естьли будутъ употреблены нѣсколько полиспастовъ, то и тутъ по предыдущему не трудно опредѣлить содержаніе силы къ тяжести.

Напримѣръ въ *фигурѣ* 84, допустивъ концы веревки паралельными, найдемъ (589), что сила Q содержится къ сопротивленію по BC = 1 : 5; а какъ это сопротивленіе само заступаетъ мѣсто силы въ разсужденіи сна-

ряда BA, и содержится къ тяжести P = 1 : 4, то умноживъ по порядку объ сіи пропорціи, будемъ имѣть Q : P = 1 : 20; отсюда явствуетъ, что сопротивленіе 50 фунтовъ, на примѣръ, можетъ поддерживать тяжесть въ 1000 фунтовъ.

592. Во всемъ предыдущемъ мы не допускали ни тяжести блоковъ, обоймъ и проч. ни тренія и несовершенной гибкости веревокъ. Мы увидимъ ниже, какое вниманіе должно обращать на послѣднія два рода сопротивленія; чтожъ принадлежитъ до тяжести подвижныхъ частей, которыя нужно поддерживать силѣ, то вниманіе, какое тутъ должно обращать на равновѣсіе, состоитъ въ томъ, чтобъ всю ихъ величину относить къ величинѣ тяжести P, когда (*фиг.* 81 и 82) цѣлое ихъ дѣйствіе одинаково съ дѣйствіемъ P; когда же напротивъ (*фиг.* 84) тяжесть снаряда CF не будетъ дѣйствовать по той же линеѣ BC, но какой бы дѣйствовало сопротивленіе сего снаряда безъ тяжести, тогда BC не будетъ находиться больше въ послѣднемъ семъ направленіи, но въ сложномъ направленіи тяжести сего снаряда и усилія его безъ тяжести; но какъ этотъ предметъ не большой важности во всѣхъ случаяхъ, гдѣ употребляются блоки такимъ

образомЪ; то мы и не намѣрены входить вЪ подробное изысканіе содержанія силы кЪ тяжести.

593. Что касается до движенія вЪ простомЪ блокѣ, то мы посудимЪ здѣсь о томЪ только, которое сообщается тяжести во время параллельности концовЪ веревки. Но не трудно примѣтить, что вЪ простомЪ и неподвижномЪ блокѣ (*фиг.* 72) тяжесть P имѣетЪ одинакую скорость сЪ силою Q; а вЪ подвижномЪ и простомЪ (*фиг.* 75) она подымается вдвое тише дѣйствуемой силы.

ВЪ полиспастахЪ, когда концы веревки параллельны, скорость тяжести содержится кЪ скорости силы, какЪ сила кЪ тяжести при равновѣсіи. Ибо не трудно примѣтить, что какЪ скоро подвижной полиспастЪ (*фиг.* 81 и слѣд.) подымется примѣромЪ на одинЪ футЪ, всѣ концы, прикосновенные кЪ этому полиспасту, сократятся также на футЪ; слѣд. конецЪ, у котораго дѣйствуетЪ сила, долженЪ увеличиться столькими футами, сколько находится концовЪ прикосновенныхЪ кЪ подвижному полиспасту.

594. Когда блоки употреблены будутЪ вЪ машинахЪ, гдѣ правильность и точность

движенія необходимо нужны, тогда надобно имѣть еще вниманіе къ ихъ упорности; но какъ коловратное движеніе происходитъ отъ тренія, то мы будемъ говорить объ этомъ ниже.

О Рычагѣ, когда передаваемыя ему силы дѣйствуютъ всѣ въ одной плоскости.

595. Подъ *Рычагомъ* разумѣемъ незгибаемой прутъ всякой фигуры и всякой толщины, который утверждается въ одной своей точкѣ C такъ (*фиг.* 85 и 86), что онъ, по дѣйствію сообщенныхъ ему силъ, не можетъ принять другаго движенія, кромѣ *коловратнаго.* Точка C, около которой онъ вертится, называется *подпорною.*

596. Мы будемъ принимать сперва рычагъ безъ массы и безъ тяжести. Во время равновѣсія не трудно разсуждать о сей послѣдней, потому что можно почитать ее сосредоточенною въ центрѣ тяжести рычага, и слѣд. принимать ее новою силою, сообщенною въ той точкѣ по вертикальному направленію. Во время же движенія должно относить совокупленную массу не къ центру

тяжести, но къ другой точкѣ, которую мы опредѣлимъ тотчасъ.

597. Мы допустимъ сначала, что всѣ передаваемыя рычагу силы находятся вмѣстѣ съ подпорною точкою въ одной плоскости; потомъ будемъ трактовать о равновѣсіи и движеніи рычага, когда сообщенныя ему силы будутъ находиться въ разныхъ плоскостяхъ.

593. И такъ положимъ, что двѣ силы P и Q (*фиг.* 85 и 86) дѣйствуя въ двухъ точкахъ B и D на рычагъ BCD не посредственно, или посредствомъ двухъ веревокъ или двухъ прутовъ, не имѣющихъ массы по направленіямъ BP, DQ, приходятъ въ равновѣсіе; надобно знать причины сего равновѣсія?

Поелику какая нибудь сила изъ этихъ двухъ, на примѣръ Q не иначе можетъ здѣлать равновѣсіе съ другою, какъ посредствомъ подпорной точки C; то должно заключить, что сила Q производитъ два дѣйствія, изъ которыхъ одно уничтожаетъ дѣйствіе силы P, а другое уничтожается само подпорною точкою C, и слѣд. проходитъ черезъ нее.

Продолжимъ неопредѣленно направленія PB и QD, и проведемъ изъ точки A пересѣченія ихъ линею AC. А поелику можно (196) допустить силу Q перенесенною въ точку A по направленію AQ, то представивъ чрезъ AG величину ея, здѣлаемъ паралделограммъ AHGE, котораго діагональю будетъ служить AG, а смежными боками направленія AC и BAE; тогда AE представитъ (193) дѣйствіе силы Q противъ P, а AH ея же дѣйствіе противъ подпорной точки C. Ибо будетъ ли точка A соединена съ двумя точками B и C, или нѣтъ; но дѣйствіе силы Q должно раздѣлиться, какъ бы онѣ всѣ между собою были связаны. На примѣръ, не перемѣняя ничего ни въ самыхъ силахъ, ни въ направленіяхъ ихъ, допустимъ точку A соединенною съ тремя B, C, D посредствомъ трехъ неизгибаемыхъ и безъ массы прутьевъ AB, AC, AD; и мы найдемъ, что это не здѣлаетъ никакой перемѣны въ положеніи настоящей системы, и слѣд. сила Q будетъ дѣйствовать одинаково; слѣд. она будетъ дѣйствовать также и въ первомъ случаѣ.

А поелику мы предполагаемъ равновѣсіе, и допускаемъ силу AE въ прямой противоположности съ P; то надобно обѣимъ этимъ

силамъ быть равными. Что принадлежитъ до силы AH, то направленіе ея къ точкѣ C показываетъ очевидно, что она должна уничтожиться.

И такъ представивъ чрезъ C обремененіе подставки C, выдетъ Q : P : C = AG : AE : AH.

599. Естьли отъ A къ B возьмемъ AI = AE, и проведемъ IH, то не трудно примѣтить, что произойдетъ изъ того параллелограммъ AIHG. Но AI, AG бока сего параллелограмма означаютъ величины и направленія двухъ силъ P и Q, слѣд. діагональ AH представитъ собою составную изъ нихъ силу. А поелику AH представляетъ также обремененіе подпорной точки, то должно заключить вообще, что обремененіе подпорной точки будетъ въ точности изображать сложную силу изъ двухъ сообщенныхъ рычагу; и слѣд. эти двѣ силы дѣйствуютъ на подставку такъ, какбы онѣ дѣйствовали на нее непосредственно по направленіямъ параллельнымъ съ настоящими ихъ направленіями.

600. Впрочемъ можно еще увѣриться въ этой истиннѣ непосредственно такъ: поелику вмѣсто силы Q можно принять двѣ другія

АЕ, АН, изъ которыхъ первую уничтожаетъ сила Р, а вторая остается единственнымъ дѣйствіемъ, въ которое обращаются обѣ начальныя силы Р и Q, и потому она ничто иное, какъ составная изъ нихъ.

601. По содержаніямъ Q : P : C = AG : AE : AH, которыя вывели мы (598), можно сравнивать силы Q и P какъ между собою, такъ и съ обремененіемъ С подставки. Но какъ эти содержанія не такъ легко употреблять; то вотъ два другіе способы, которые могутъ быть для сего предмета удовлетворительны.

1е. По объявленному (201) AG : AE : AH = *син.* HAE : *син.* HAG : *син.* GAE или *син.* HAI : *син.* HAG : *син.* GAI, потому что углы HAE, GAE имѣютъ одинакіе синусы съ дополненіями своими HAI, GAI; слѣд. Q : P : C = *син.* HAI : *син.* HAG : *син.* GAI; то есть, двѣ силы Q и P и обремененіе подставки С можно представить всегда угломъ, заключающимся между направленіями двухъ другихъ.

2е. Видѣли мы (202), что изъ трехъ силъ, въ коемъ числѣ полагается одна сложная изъ двухъ другихъ, двѣ какія нибудь находятся между собою въ обратномъ содер-

жаніи перпендикуляровъ, проведенныхъ къ направленіямъ ихъ изъ какой нибудь точки, взятой на направленіи третьей.

И такъ проведши изъ произвольной точки, напримѣръ C линеи AC перпендикуляры CL, CM къ направленіямъ PB, QD, будемъ имѣть Q : P = CL : CM.

602. Равномѣрно естьли изъ какой нибудь точки направленія Q, на примѣръ изъ точки D проведемъ перпендикуляры DO, DR къ направленіямъ силы P и обремененія подставки; то получимъ P : C = DR : DO. Такимъ же образомъ сравнится сила Q съ обремененіемъ C.

Всѣ сіи истинны имѣютъ свою силу, какой бы фигуры ни былъ рычагъ, и какія бы ни даны были направленія двумъ силамъ.

603. Ежели направленія двухъ силъ будутъ параллельны, (въ какомъ случаѣ сложная сила или обремененіе подставки будетъ съ ними также параллельна); то всѣ перпендикуляры, проведенные изъ одной точки направленія какой нибудь изъ этихъ силъ на направленія двухъ другихъ, пройдутъ по одной и той же линеѣ LCM (*фиг. 87*); слѣд.

можно утвердить, что по проведеніи перпендикуляра LCM къ направленіямъ параллельныхъ силъ, каждая сила изобразится частію прямой линеи, заключающейся между направленіями двухъ прочихъ.

604. Когдажъ притомъ рычагъ будетъ еще прямой, то по подобію треугольниковъ CLB, CMD не трудно примѣтить, что части CB, CD, BD будутъ имѣть одинакое содержаніе съ частями CL, CM, LM. Слѣд. каждая сила въ этомъ случаѣ изобразится частію самаго рычага, заключающеюся между направленіями двухъ другихъ; и можно утвердить, что Q : P = CB : CD, то есть, что обѣ силы будутъ находиться въ обратномъ содержаніи съ плечами рычага CB, CD; такимъ образомъ сила Q должна тѣмъ менѣе быть для учиненія равновѣсія съ силою P, чѣмъ плечо CD, на которое она дѣйствуетъ, будетъ больше въ разсужденіи BC. Что жъ принадлежитъ до обремененія подставки, то оно будетъ равно суммѣ обѣихъ силъ P и Q, потому что представивъ (203) ихъ чрезъ CD и BC, получимъ въ BD изображеніе обремененія.

605. Естьли станемъ различать положенія мѣстъ движущей силы Q въ разсужденіи движимаго

Р и подставки С; то можемъ съ древними раздѣлять рычагъ на три рода.»

Фигура 88 представляетъ *рычагъ перваго рода*; тутъ сила и движимое находятся съ разныхъ сторонъ подставки, и сила тѣмъ болѣе имѣетъ выгоды (601), чѣмъ больше удалена отъ подставки.

Фигура 89 изображаетъ *рычагъ втораго рода*, гдѣ движимое находится между подставкою и силою, которая имѣетъ также свои выгоды.

Наконецъ *рычагъ третьяго рода* (*фиг.* 90) есть тотъ, въ которомъ сила находится между подставкою и движимымъ; она имѣетъ тутъ совершенную невыгоду, и слѣд. совсѣмъ негодится употреблять этотъ рычагъ въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ надобно увеличить движущую силу, то есть, привести ее въ состоянїе преодолѣть другую больше себя. Но поелику мы не всегда имѣемъ предметомъ дѣлать это, какъ мы уже то замѣтили выше, и потому можно употреблять съ великою пользою рычагъ третьяго рода во всѣхъ тѣхъ машинахъ, гдѣ нужно разполагать движенїемъ по произволу. Онъ въ великомъ употребленїи находится у ткачей, потому что работникъ, не имѣя тутъ рукъ свободныхъ для приведенїя машины въ движенїе, дѣйствуетъ въ замѣну ногами, упираясь о подножки CD, которыя веревкою по блоку R подымаютъ и опускаютъ нитки.

606. Замѣтимъ еще, прежде нежели поступимъ впередъ, что при самомъ исключенїи тренія, не можно почитать подпорную точку просто подставкою. Въ самомъ дѣлѣ еже-

ли подставка C (*фиг.* 86) не будетъ входить во внутренность рычага, а касаться только къ поверхности его; то хотя обѣ Q и P силы и будутъ въ обратномъ содержаніи съ перпендикулярами CM, CL, но онѣ не могутъ притти въ равновѣсіе, кромѣ одного случая, когда направленіе AC будетъ перпендикулярно къ BD, (или къ тангенсу въ C (*фиг.* 85); напротивъ же того AC имѣя косое положеніе, должно сообщить рычагу движеніе по BD; и слѣд. мы здѣлаемъ ошибку, естьли станемъ заключать объ рычагѣ, когда онъ будетъ только опираться поверхностію своею о точку C, что силы P и Q могутъ притти въ равновѣсіе въ косомъ положеніи его PQ (*фиг.* 91), хотя бы здѣлано было исключеніе тренію, тяжести, и хотя бы P : Q = CQ : CP. И такъ подставка можетъ здѣлать равновѣсіе во всякомъ мѣстѣ рычага тогда только, когда дѣйствіе ея подобно будетъ вертелу и сообщитъ коловратное движеніе вокругъ C. Словомъ, когда говоримъ, что для равновѣсія двухъ силъ довольно дать составной изъ нихъ такое направленіе, которое проходило бы чрезъ подпорную точку C, тогда подразумѣваемъ эту точку неподвижною; допущеніе сіе необходимо нужно.

На примѣръ естьли рычагъ BD (*фиг.* 92) станутъ тянуть три силы P, Q, R веревками BP, DQ, CR, то хотя бы AC, направленїе составной силы изъ P и Q, и проходило по подпорной точкѣ C, не можетъ еще произойти равновѣсїя; но надобно сверхъ этого, чтобъ точка A упала на CR.

607. Поелику всѣ силы P и Q, дѣлающія равновѣсіе посредствомъ рычага BCD (*фиг.* 85), должны находиться въ обратномъ содержаніи съ перпендикулярами CL, CM, то есть, должны здѣлать такую пропорцію $P : Q = CM : CL$, изъ которой выходитъ $P \times CL = Q \times CM$; но это показываетъ, что моменты этихъ двухъ силъ, взятые относительно къ подпорной точкѣ, или (217) относительно ко всякой другой точкѣ на направленіи AC, должны быть равны.

608. Поелику не можетъ быть силы безъ стремленія къ движенію, то должно подъ выраженіями *силъ* P и Q разумѣть произведеніе извѣстной массы на скорость, которую способны собщить ей тѣ силы. И такъ представимъ чрезъ M нѣкоторую массу, а чрезъ V скорость, которую сила P, дѣйствуя свободно на эту массу, можетъ ей сообщить; представимъ равномѣрно чрезъ M' другую массу, и чрезъ V' скорость, сообщенную ей силою Q; въ сходственность

объявленнаго мы должны получить $M \times V : M' \times V' = CM : CL$.

609. Положимъ теперь g скоростію, которую способна дать тяжесть въ мгновеніе каждой матеріальной части свободной, и допустимъ также M и M' (*фиг.* 93) тяжелыми тѣлами, повѣшенными на концахъ BIM, DKM' двухъ веревокъ, которыя проходя по блокамъ I и K, сообщаютъ въ цѣлости рычагу BCD дѣйствіе тяжести этихъ силъ по какимъ нибудь направленіямъ BI и KD; и такъ для равновѣсія должно произойти $gM : gM' = CO : CN$, то есть, $M : M' = CO : CN$. Слѣд. вообще двѣ массы, побуждаемыя къ движенію одною только своею тяжестію, или двѣ массы, получившія равныя скорости, здѣлаютъ равновѣсіе въ рычагѣ тогда, когда онѣ будутъ находиться въ обратномъ содержаніи разстояній отъ подпорной точки до тѣхъ направленій, по которымъ силы тянутъ рычагъ.

610. Но ежели скорости будутъ разныя, то въ такомъ случаѣ не массы однѣ, но произведенія ихъ на скорости должны быть въ обратномъ содержаніи разстояній направленія ихъ отъ подпорной точки.

611. Поелику та скорость, которую способна дать тѣламъ тяжесть ихъ, бываетъ въ мгновеніе времени безконечно мала; то должно заключить, что двѣ опредѣленныя или конечныя тяжелыя массы M и M′ (*фиг.* 93), получивши конечныя но неравныя скорости по направленіямъ IM и KM′, взаимно уничтожатся, какъ скоро количества движенія ихъ по силѣ послѣднихъ скоростей придутъ въ обратное содержаніе съ CO и CN. Но это равновѣсіе будетъ мгновенно, потому что по взаимномъ уничтоженіи сихъ скоростей, тѣла M и M′ подвергшись опять дѣйствію своей тяжести, получатъ отъ нее количества движенія, которыя будутъ уже въ простомъ содержаніи массъ, а не въ обратномъ разстояніи CO и CN.

Изъ сего можно видѣть разность между равновѣсіемъ массъ, побуждаемыхъ тяжестію ихъ, и равновѣсіемъ такихъ, которымъ сообщаются конечныя скорости.

612. Другое замѣчаніе нужно здѣлать здѣсь то, что никогда не можно привести въ равновѣсіе двухъ массъ, изъ которыхъ одна будетъ побуждаема единственною тяжестію своею, а другая конечною скоростію; этому доказательствомъ служитъ изъясненное (359).

Слѣд. ежели бремя P (*фиг.* 88) приходитъ въ равновѣсіе съ силою Q человѣка напримѣръ, или животнаго и проч., то должно заключить, что эта послѣдняя сила двигаетъ точку D съ безконечно малою скоростію. Когда же сила Q начнетъ дѣйствовать на D конечнымъ потрясеніемъ или напряженіемъ, тогда неминуемо подыметъ бремя P, какой бы оно величины ни было, по крайней мѣрѣ на нѣкоторое время. И такъ можетъ случиться, что когда P будетъ слишкомъ велико, глазъ не можетъ примѣтить движенія; однакожъ это движеніе произойдетъ неминуемо. *Смотри* изъясненное нами (359).

Мы нужнымъ почли помѣстить здѣсь разсужденія сіи для того, чтобъ дать начинающимъ истинное понятіе о дѣйствіяхъ силъ въ машинахъ; польза этого здѣлается ощутительнѣе для нихъ, по мѣрѣ какъ мы поступимъ впередъ.

613. Выведенныя (598 и слѣд.) содержанія для двухъ силъ P, Q и обремененія C подставки (*фиг.* 85 и слѣд.), подаютъ средство рѣшить слѣдующій общій вопросъ. *По даннымъ тремъ вещамъ изъ шести, которыя суть: двѣ силы, обремененіе подстав-*

ки и направленія ихъ, найти три прочія?

Когда однѣ направленія будутъ даны, тогда кромѣ содержанія силъ не можно другаго ничего опредѣлить. Рѣшеніе сего вопроса можно видѣть (559); его можно здѣлать также по Геометрическимъ конструкціямъ, но мы не намѣрены входить въ подробность, а замѣтимъ только, что ежели направленія будутъ параллельны, то вопросъ рѣшится (206 и слѣд. или 603); наконецъ вообще, ежели потребуется опредѣлить положеніе подставки по извѣстнымъ силамъ P и Q и ихъ положенію, то рѣши такой вопросъ (206).

614. Но не льзя рѣшить этого вопроса означенными способами, когда будутъ дѣйствовать на рычагъ болѣе двухъ силъ; ибо въ такомъ случаѣ можно, какъ-то мы видѣли, разсуждая о веревкахъ (570), дѣлать безчисленныя перемѣны отношеніямъ нѣкоторыхъ силъ, и при томъ получать всегда равновѣсіе; разность между рычагомъ и веревками состоитъ въ томъ, что допущеніе на равновѣсіе рычага есть одно; но для равновѣсія веревокъ ихъ должно быть столько, сколько находится числомъ узловъ (572). Для насъ довольно будетъ узнать это допу-

щеніе для трехЪ силЪ, чтобЪ увѣриться, что оно можетЪ имѣть свою силу и во всякомЪ другомЪ числѣ ихЪ.

615. И такЪ положимЪ, что три силы P, Q, R (*фиг.* 94), имѣющія направленія по BP, EQ, DR, приводятЪ рычагЪ BCED вЪ равновѣсіе. Сила Q противудѣйствуетЪ обѣимЪ силамЪ P и R и подставкѣ C.

Продолживши направленія всѣхЪ силЪ, и взявши отЪ точки A пересѣченія BP сЪ EQ линею AH для представленія силы Q, воображаю эту силу раздѣленною на двѣ другія, на AG равную и противоположную силѣ P, и на AF такую, которая бы здѣлала равновѣсіе сЪ силою R посредствомЪ подставки C. ПотомЪ переношу силу AF вЪ I, гдѣ DR пересѣкается сЪ AF, и положивЪ ее на направленіе AFIL, раздѣляю AF или IL на двѣ другія такЪ, чтобЪ одна изЪ послѣднихЪ IK равна была и противуположна силѣ R, а другая IM имѣла бы направленіе кЪ подпорной точкѣ C. И такЪ сила Q получитЪ три разныя дѣйствія, изЪ которыхЪ два первыя уничтожатся, потому что равны и противоположны силамЪ P и R; а послѣднее уничтожится потому, что имѣетЪ направленіе кЪ неподвижной точкѣ C. А поелику дѣй-

ствующія на рычагъ силы P, Q и R превращаются въ AG, IK, IM, P и R, изъ которыхъ AG, IK, P и R уничтожаются, то заключимъ о IM, что она есть составная изъ всѣхъ трехъ P, Q, R; и слѣд. единственное допущеніе, на которомъ основывается равновѣсіе, состоитъ въ томъ, чтобъ сложная сила изъ всѣхъ проходила по подпорной точкѣ C. Явствуетъ также, что силы P, Q, R дѣйствуютъ на подставку C такъ, какбы онѣ дѣйствовали на нее непосредственно по параллельному направленію съ настоящимъ своимъ положеніемъ. Эта истинна относится вообще ко всякому числу силъ, потому что можно всегда одну изъ нихъ предположить дѣлающею равновѣсіе со всѣми остальными.

616. Поелику C должна представлять какую нибудь точку составной силы, то она должна имѣть тѣже свойства, о которыхъ мы сказали (217); то есть, вообще *ежели при равновѣсіи многихъ силъ, дѣйствующихъ на рычагъ въ одной плоскости, проведешъ изъ подпорной точки перпендикуляры на направленія тѣхъ силъ, и умножишъ потомъ каждую силу на сходственный перпендикуляръ; то есть, ежели возмешъ моменты этихъ силъ относительно*

къ подпорной точкѣ; то сумма моментовъ силъ, стремящихся вертѣть рычагъ въ одну сторону, должна быть равна суммѣ моментовъ, стремящихся вертѣть его въ противную. А чтобъ это выразить вообще, то взявши моменты силъ, стремящихся вертѣть въ противную сторону съ отрицательными знаками, утвердимъ однимъ словомъ, что *сумма моментовъ должна равняться нулю.*

617. И такъ все сказанное нами (219 и слѣд.) для нахожденія величины и направленія сложной силы, можетъ служить также для опредѣленія бремени и положенія подпорной точки, какое бы впрочемъ число силъ ни было.

618. Естьли по извѣстнымъ двумъ вѣсамъ P и Q (*фиг.* 95) длинѣ и вѣсу рычага BD, захотимъ опредѣлить на какомъ мѣстѣ подпорной точки C здѣлается равновѣсіе; то вообразивъ вѣсъ рычага новою силою R, вертикально дѣйствующею на центръ тяжести его E, должно найти положеніе неизвѣстной точки C такое, чтобъ моментъ P относительно къ этой точкѣ былъ равенъ суммѣ моментовъ двухъ вѣсовъ R и Q, взятыхъ относительно къ той же искомой точкѣ C.

Положимъ для примѣра, что рычагъ BD данъ прямой и при томъ толщины и тяжести повсюду одинакой; и такъ замѣтивъ, что по причинѣ параллельности можно вмѣсто перпендикуляровъ CI, CK, CL употребить части BC, CE, CD самаго рычага, имѣющія одинакое съ предыдущими содержаніе, получимъ $P \times BC = R \times CE + Q \times CD$.

Пусть a будетъ длина рычага, x разстояніе BC; слѣд. (251) будемъ имѣть $BE = \frac{1}{2} a$; $CE = \frac{1}{2} a - x$, $CD = a - x$. Представимъ также чрезъ p удѣльную тяжесть рычага; а чтобъ болѣе ограничить понятіе, то положимъ, что p изображаетъ вѣсъ одного дюйма длины рычага, a и x длины также въ дюймахъ; слѣд. pa изобразитъ цѣлой вѣсъ R. Въ сходственность сего получимъ $Px = pa\left(\frac{1}{2} a - x\right) + Q \times (a - x)$; отсюда выходитъ $x = \frac{\frac{1}{2}paa + Qa}{P + pa + Q}$.

Допустивъ $a = 24$д., $P = 20$ фунт., $Q = 4$ фунт., $p = \frac{1}{12}$ фунт., найдемъ $x = \frac{120}{25} = 4$д. $\frac{8}{13}$; то есть, что точка C должна быть удалена отъ конца B на 4 и $\frac{8}{13}$ д. Но опустивъ тяжесть рычага, мы должны бы получить $x = \frac{Qa}{P + Q} = \frac{96}{24} = 4$д.

619. Естьли напротивъ будутъ даны точки B и C, а надобно сыскать точку D, гдѣ должна быть сила Q, предполагая ее равно какъ и P извѣстными; то представивъ BC чрезъ b, а BD чрезъ y, получимъ уравненіе моментовъ $Pb = py\left(\frac{1}{2} y - b\right) + Q(y - b)$, изъ котораго выходитъ $y = \dots\dots\dots$ $\frac{pb - Q \pm \sqrt{[(Q - pb)^2 + (2Pb + 2Qb)p]}}{p}$. Одна изъ этихъ величинъ положительная показываетъ разстояніе BD въ *фигурѣ* 95, а отрицательная отно-

сится къ разстоянію BD (*фиг.* 96), по допущеніи разстоянія BC неимѣющимъ тяжести.

Ежели пожелаешь опредѣлить, на какомъ разстояніи y тяжесть части CD (*фиг.* 95) способна здѣлать равновѣсіе съ вѣсомъ P, то должно въ уравненіи принять $Q = o$; послѣ чего выведешь $y = \frac{pb + \sqrt{(p^2b^2 + 2pPb)}}{t}$.

620. Естьли въ *фигурѣ* 97 по извѣстнымъ P, Q, BC и удѣльной тяжести рычага DC, захотимъ опредѣлить разстояніе CD, гдѣ должна дѣйствовать сила D; то представивъ CD чрезъ y, BC чрезъ b, получимъ въ py вѣсъ R; слѣд. уравненіе выходитъ $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$, по которому не трудно опредѣлить y.

621. Въ *фигурѣ* 95 не трудно примѣтить, что чѣмъ рычагъ будетъ длиннѣе, тѣмъ сила Q будетъ болѣе уменьшаться, и уменьшается до тѣхъ поръ, пока обратится въ нуль; послѣ чего она начинаетъ дѣйствовать въ противную сторону.

Въ *фигурѣ* 97 при усугубленіи величины рычага сила Q сначала уменьшается до нѣкотораго предѣла; но перешедъ за него, начинаетъ увеличиваться. Въ этомъ можно увѣриться разными образами, и между прочимъ по уравненію $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$, которое давая $Q = \frac{Pb + \frac{1}{2}pyy}{y}$ показываетъ, что при $y = o$, Q должно быть безконечное количество; и такъ между этими двумя крайними случаями она должна имѣть конечныя величины; слѣд. при переходѣ ея за упомянутой предѣлъ она должна имѣть

самомалѣйшую величину. Но для опредѣленія этого предѣла, стоитъ только дифференціалъ величины Q приравнять (36) къ нулю, принимая въ немъ одно y перемѣннымъ. Въ сходственность чего получимъ $-\frac{(Pb+\frac{1}{2}py^2)dy}{yy}+pdy=o$, изъ котораго выходитъ $y=\sqrt{\frac{(2Pb)}{p}}$. И такъ *самомалѣйшая величина Q, могущая привести въ дѣйствіе рычагъ втораго рода, есть $\sqrt{(2Ppb)}$, полагая длиною рычага $\sqrt{\frac{(2Pb)}{p}}$.*

Отсюда явствуетъ, что для подъему тяжести F (98) съ самомалѣйшею силою посредствомъ тяжелаго рычага, надобно употреблять его извѣстной длины. Однакожъ это вниманіе въ разсужденіи длины не относится равно къ рычагамъ принимаемыхъ безъ тяжести. Впрочемъ изъ предыдущаго примѣра (*фиг.* 98) можно замѣтить, что не должно брать за P цѣлую величину бремени F; мы увидимъ ниже какую именно должно брать.

622. Рычагъ перваго рода употребляется также съ великою пользою для подъему весьма большихъ тяжестей, какъ то всякихъ повозокъ и Артиллерійскихъ орудій (*фиг.* 99) посредствомъ *козловъ*. Козлы (*фиг.* 100) состоятъ изъ двухъ стоякъ AB, CD съ подпорами EF, GH, которыя поддерживаются лежнями EG, FH.

623. Къ рычагу перваго рода должно относить обыкновенные вѣсы (*фиг.* 101) и тѣ, которые называются *Римскими* или безменомъ (*фиг.* 102), и по

которымЪ вѣсЪ тѣла всегда опредѣляется постоянною тяжестiю p.

А какЪ вѣсы во всѣхЪ ремеслахЪ находятся вЪ великомЪ употребленiи, то мы намѣрены остановиться нѣсколько времени на разсмотренiи главнаго ихЪ строенiя.

624. Для большей ясности положимЪ, что точка C (*фиг.* 103), около которой коромысло движется, находится не на линеѣ AB, у концовЪ которой повѣшены чашки; и допустимЪ также, что g центрЪ тяжести коромысла безЪ чашекЪ и ихЪ принадлежностей, находится внѣ вертикала проходящаго по C.

Главною вещью вЪ строенiи сей машины почитается то, чтобЪ стрѣлка была вертикальна, или чтобЪ линея AB, на концахЪ которой висятЪ чашки, находилась всегда вЪ горизонтальномЪ положенiи, когда чашки будутЪ пусты или сЪ равными вѣсами.

ДопустимЪ p и p' вѣсами двухЪ чашекЪ EF, GH сЪ ихЪ принадлежностями, то есть, сЪ веревками или цѣпьми и ихЪ кольцами; а P пусть будетЪ вѣсЪ, полагаемый вЪ каждую чашку.

Ежели чашки будутЪ пусты, и линея LCD вертикальна, то мы получимЪ $p \times AD = p' \times BD + g \times gi$, назвавЪ g вѣсЪ коромысла и проведши перпендикулярЪ gi на CD.

Когдажъ положишь вЪ каждую чашку вѣсЪ P, то произойдетЪ $(P + p) \times AD = (P + p') \times BD + g \times gi$; и по исключенiи перваго уравненiя изЪ

сего втораго, будемъ имѣть P × AD = P × BD, или AD = BD, и слѣд. AC = BC.

И такъ сія машина будетъ сохранять постоянное положеніе тогда только, когда при обремененіи чашекъ равными вѣсами, оба плеча AC и BC будутъ также равны между собою.

625. И такъ нѣтъ большой важности въ равенствѣ вѣса концовъ AC, CB коромысла. Естьли AC и BC будутъ совершенно одинакой длины, и ежели вѣсу чашекъ будетъ дано приличное содержаніе для приведенія коромысла въ горизонтальное положеніе; то коромысло сіе будетъ держаться горизонтально и тогда, когда въ каждую чашку положены будутъ еще равныя тяжести.

626. Ежели же найдется какая нибудь неравность въ длинѣ концовъ коромысла, то положенныя въ чашки тяжести хотя и здѣлаютъ равновѣсіе; но это равновѣсіе не будетъ вѣрнымъ знакомъ равенства тяжестей. Ибо, по переложеніи ихъ изъ одной чашки въ другую, равновѣсіе потеряется; и по этому-то можно узнавать вѣрность вѣсовъ или то, равны ли здѣланы въ длинѣ концы коромысла.

627. Естьли вѣсы будутъ здѣланы вѣрно, и длина обоимъ концамъ AC и BC дана будетъ одинакова, то при малѣйшей неравности положеныхъ въ чашки тяжестей равновѣсіе должно нарушиться, и вѣсы покачнутся. И для удобнѣйшаго употребленія вѣсовъ, склоненіе ихъ должно быть ни съ лишкомъ мало ни съ лишкомъ велико. Медленное склоненіе заставляетъ сумнѣваться въ равновѣсіи, а при слишкомъ скоромъ весьма трудно достигнуть до онаго.

628. Посмотримъ теперь, какъ опредѣляется приличное склоненїе коромысла на всякую разность полагаемыхъ въ чашки вѣсовъ.

Представимъ чрезъ p и p', какъ и выше, вѣсъ чашекъ EF и GH съ ихъ принадлежностями; чрезъ $P + p''$ вѣсъ положенный въ чашку EF, а чрезъ P въ чашку GH.

Допустимъ, что разность p'' сихъ двухъ вѣсовъ приводитъ коромысло въ положенїе aCb, гдѣ описанный уголъ концомъ AC равняется a. Точка B приходитъ въ b, а центръ тяжести G въ m; въ сходственность сего получимъ $BCb = gCm = ACA = a$

Положимъ уголъ $ACD = BCD = b$, уголъ $iCg = c$, $AC = l = Ca = Cb$, $Cg = r = Cm$. По проведенїи горизонталей al, mk, bn, будемъ имѣть $al = l$ *син.* $(b - a)$, $bn = l$ *син.* $(a + b)$, $km = r$ *син.* $(a + c)$. А поелику система должна остановиться въ положенїи aCb, и силы дѣйствующїя въ a, m и b суть вертикальны; то по правиламъ моментовъ получимъ $(P + p + p'') \times al = (P + p') \times bn + q \times km$, q означаетъ вѣсъ коромысла.

Вставивъ вмѣсто al, bn и km найденныя величины ихъ, будемъ имѣть $(P + p + p'')\, l$ *син.* $(b - a) = (P + p')\, l$ *син.* $(a + b) + qr$ *син.* $(a + c)$, или $(P + p + p'')\, l$ (*син.* b *кос.* a — *син.* a *кос.* b) $= (P + p')\, l$ (*син.* a *кос.* b + *син.* b *кос.* a) $+ qr$ (*син.* a *кос.* c + *син.* c *кос.* a); отсюда выходитъ $\frac{\text{син.}\, a}{\text{кос.}\, a}$ или *танг.* $a =$

$$\frac{(P + p + p'')\, l\, \text{син.}\, b - (P + p')\, l\, \text{син.}\, b - qr\, \text{син.}\, c}{(2P + p + p' + p'')\, l\, \text{кос.}\, b + qr\, \text{кос.}\, c}.$$

А какъ при разности $p'' = o$ вѣсы не должны имѣть никакого склоненія, то и a въ такомъ случаѣ должно быть $= o$; и слѣд. будемъ имѣть также $(P + p)\, l$ *син.* $b = (P + p')\, l$ *син.* $b + qr$ *син.* c. Вставивъ въ числителѣ величины *танг.* a, величину qr *син.* c, выведенную изъ сего послѣдняго уравненія, получимъ *танг.* $a = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{p''\, l \text{ син. } b}{(2P + p + p' + p'')\, l \text{ кос. } b + qr \text{ кос. } c}.$$

629. Ежели точка C, около которой вѣсы вертятся, будетъ находиться въ прямой линеѣ съ A и B; то *син.* b въ такомъ случаѣ $= 1$, а *кос.* $b = o$; и слѣд. величина *танг.* a обращается въ *танг.* $a =$ $\frac{p''\, l}{qr \text{ кос. } c}$. Отсюда явствуетъ, что при равенствѣ всѣхъ вещей, вѣсы тѣмъ труднѣе будутъ склоняться по силѣ разности p'' положенныхъ въ чашки тяжестей, чѣмъ длиннѣе будутъ зделаны концы коромысла; ибо каковъ бы уголъ b ни былъ, величину *танг.* a можно представить въ такомъ видѣ *танг.* $a = \ldots$

$$\frac{p'' \text{ син. } b}{(2P + p + p' + p'') \text{ кос. } b + q \text{ кос. } c\frac{r}{l}};$$

но по этому выраженію не трудно примѣтить, что *танг.* a становится тѣмъ больше, при всѣхъ впрочемъ равныхъ вещахъ, чѣмъ менѣе зделается членъ q *кос.* $c\,\frac{r}{l}$; но этотъ членъ уменьшается по мѣрѣ какъ l увеличивается.

И такъ тѣ вѣсы надобно почитать лучшими, у которыхъ концы коромысла будутъ длиннѣе, только бы они не гнулись.

630. Когдажъ три точки А, С, В вмѣстѣ съ точкою g будутъ находиться на одной линеѣ; тогда *кос. с* здѣлается $=o$, и мы получимъ *танг. а* $= \frac{p'' \text{ син. } b}{o}$, или *танг. а* = безконечному количеству. Но это показываетъ, что подъ угломъ *а* 90 градусовъ вѣсы при малѣйшемъ неравенствѣ тяжестей должны покачнуться совсѣмъ на одну сторону. Слѣд. не надобно дѣлать вѣсовъ такъ, чтобъ четыре точки А, С, В и g находились въ прямой линеѣ.

631. Но хотя и нужно остерегаться, чтобъ не располагать этихъ четырехъ точекъ на прямой линеѣ; однако должно замѣтить, что вообще вѣсы тѣмъ удобнѣе склоняются при неравенствѣ полагаемыхъ тяжестѣй, чѣмъ точки С и g ближе будутъ подходить къ прямой линеѣ АВ; ибо углы ACD и gCD приближаясь въ такомъ случаѣ болѣе къ прямымъ, производятъ *кос. b* и *кос. с* малѣйшими дробями, и слѣд. *танг. а* по мѣрѣ того увеличиваетcя больше.

632. Нужно также вѣсамъ быть весьма подвижнымъ; то есть, нужно чтобъ карамысло АВ, по отведенiи его отъ горизонтальнаго положенiя, возвращалось къ нему со всякою удобностiю. Посмотримъ, отъ чего зависитъ это особеннсе качество.

633. Положимъ, что какая нибудь сила F дѣйствуя на какую нибудь точку О конца коромысла АС перпендикулярно, привела вѣсы въ положенiе aCb (*фиг.* 103). Слѣд. F будетъ означать также и ту силу, съ которою вѣсы должны стремиться возвратиться назадъ, то есть, съ какою точка О будетъ стремиться вертѣть ихъ около С.

А поелику по положенїю сила F приводитъ систему въ положенїе aCb, то выходитъ (616) $F \times CO + (P + p) \times al = (P + p') \times bn + q \times mk$.

Вставивъ въ этомъ уравненїи вмѣсто al, bn и km найденныя величины ихъ (628), будемъ имѣть $F \times CO + (P + p)\, l$ *син.* $(b - a) = (P + p')\, l$ *син* $(a + b) + qr$ *син.* $(a + c)$, или $F \times CO = (P + p')\, l$ (*син.* a *кос.* b + *син.* b *кос.* a) — $(P + p)\, l$ (*син.* b *кос.* a — *син.* a *кос.* b) + qr (*син.* a *кос.* c + *син.* c *кос.* a).

Но поелику вѣсы дѣлаютъ сами по себѣ равновѣсїе въ горизонтальномъ положенїи линеи AB, то получаемъ также $(P + p)\, l$ *син.* $b = (P + p')\, l$ *син.* $b + qr$ *син.* c. Вставивъ въ предыдущемъ уравненїи величину qr *син.* c, выведенную изъ сего послѣдняго, будемъ имѣть $F \times CO = l$ *син.* a [$(2P + p + p')$ *кос.* b + $\frac{qr \text{ кос. } c}{l}$].

Отсюда явствуетъ 1е. что вѣсы должны возвращаться назадъ тѣмъ съ большимъ стремленїемъ, чѣмъ далѣе будутъ отведены отъ горизонтальнаго положенїя.

2е. Они также будутъ поворачиваться назадъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ концы коромысла ихъ будутъ длиннѣе.

3е. Естьли точка C будетъ выше D, то вѣсы поворачиваются удобнѣе, когда они болѣе обременены.

4е. Но естьли точка C будетъ ниже D, тогда *кос.* b дѣлается отрицательнымъ, потому что

уголъ ACD становится въ такомъ случаѣ тупымъ; и слѣд. вѣсы получаютъ удобность къ своему возвращенїю тогда только, когда $(2P + p + p')$ *кос.* b будетъ меньше $\frac{qr}{l}$ *кос.* c. Почему такїе вѣсы можно употреблять только для малыхъ тяжестей; но при обремененїи ихъ большими они становятся медлительнѣе и наконецъ совсѣмъ опрокидываются.

5е. Наконецъ ежели центръ тяжести случится выше точки C; тогда *кос.* c здѣлается отрицательнымъ, и вѣсы удобно возвращаются, по мѣрѣ какъ $(2P + p + p')$ *кос.* b становится больше $\frac{qr \text{ кос. } c}{l}$. Они могутъ опрокидываться при малѣйшихъ тяжестяхъ, возвращаться назадъ при тѣхъ же нѣсколько увеличенныхъ, и получаютъ легкое и удобное обращенїе при самыхъ большихъ.

О рычагѣ въ движенїи; о центрахъ ударенїя; о центрахъ каченїя и о сраженїи тѣлъ эксцентрическомъ.

634. Положимъ, что M, M′, M″ (*фиг.* 104) представляютъ какїя нибудь массы безъ тяжести и принимаемыя точками, лежащими въ одной плоскости съ точкою C, съ которою онѣ равно какъ и между собою соединены такъ, что не могутъ никакъ перемѣнить взаимныхъ своихъ растоянїй, а могутъ только обращаться около C, или

около оси, проходящей чрезъ С перпендикулярно къ ихъ плоскости.

Допустимъ также, что эти массы приведены въ одно время въ движенiе по Mm, $M'm'$, $M''m''$ такъ, что ежели бы онѣ были свободны, то получили бы такiя скорости, которыя можно представить сими же линеями; требуется опредѣлить движенiе ихъ?

Надобно, по предложенному (287) правилу, раздѣлить каждую изъ скоростей Mm, $M'm'$, $M''m''$ на двѣ другiя, изъ которыхъ бы одна представляла такую, которая должна имѣть свою силу, а другая была бы такова, что ежели бы массы M, M', M'' не имѣли другой скорости кромѣ ее, то пришли бы въ равновѣсiе.

Отсюда явствуетъ 1е. что какъ эти скорости не могутъ быть иными, кромѣ скоростей коловратнаго движенiя тѣлъ около С, и потому онѣ должны быть перпендикулярны къ радiусамъ CM, CM', CM''. 2е. А чтобъ эти скорости имѣли свое дѣйствiе, то есть, не причиняли бы перемѣны во взаимномъ своемъ отношенiи, то онѣ должны быть пропорцiональны съ растоянiями CM, CM', CM''.

По предположеніи сего раздѣляю впечатлѣнныя скорости Mm, $M'm'$, $M''m''$ на скорости Ms, $M's'$, $M''s''$, которыя могутъ имѣть свою силу, и на скорости Mq, $M'q'$, $M''q''$ посредствомъ которыхъ массы пришли бы въ равновѣсіе около C. И такъ получимъ $Ms : M's' = CM : CM'$; $Ms : M''s'' = CM : CM''$; и по проведеніи перпендикуляровъ Ct, Ct', Ct'' на продолженныя скорости Mq и проч. будемъ имѣть (616) $M \times Mq \times Ct + M' \times M'q' \times Ct' - M'' \times M''q'' \times Ct'' = o$.

Опустивъ перпендикуляры CT, CT', CT'' на продолженія Mm, $M'm'$, $M''m''$, будемъ имѣть также по свойству (211) парраллелограммовъ $M \times Mq \times Ct + M \times Ms \times CM = M \times Mm \times CT$; то есть, $M \times Mq \times Ct = M \times Mm \times CT - M \times Ms \times CM$. По той же причинѣ $M' \times M'q' \times Ct' = M' \times M'm' \times CT' - M' \times M's' \times CM'$, и $M'' \times M''q'' \times Ct'' = M'' \times M''m'' \times CT'' - M'' \times M''s'' \times CM''$.

Ежели изъ сихъ трехъ уравненій первыя два будутъ сложены, и изъ суммы ихъ вычтется послѣднее, то обративъ вниманіе на условіе равновѣсія, изображенное уравненіемъ

моментовъ, выведемъ $o = M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT'' - M \times Ms \times CM - M' \times M's' \times CM' + M'' \times M''s'' \times CM''$. А какъ изъ предыдущихъ пропорцій получаемъ $M's' = \ldots\ldots$ $\frac{Ms \times CM'}{CM}$, $M''s'' = \frac{Ms \times CM''}{CM}$, то по вставкѣ сихъ величинъ и по приведеніи, найдемъ $Ms = \frac{M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT''}{M \times (CM)^2 + M' \times (CM')^2 + M'' \times (CM'')^2} \times CM$. Но поелику числитель этой дроби, изображающей сумму моментовъ (*) силъ $M \times Mm$, $M' \times M'm'$ и проч. равняется (216) моменту составной изъ нихъ; и потому назвавъ R составную силу, а D разстояніе ея отъ точки C, получимъ за сумму моментовъ $R \times D$.

А какъ сверхъ того знаменатель изображаетъ сумму произведеній каждой массы на квадратъ разстоянія ея отъ точки C, то представивъ вообще какую нибудь изъ этихъ массъ чрезъ m, а разстояніе ея отъ точки

(*) Принимая всегда съ противными знаками моменты силъ, стремящихся вертѣть въ противную сторону.

C чрезъ r, можно послѣ сумму сихъ произведеній выразить Алгебраически чрезъ $\int mrr$, ($\int$ будетъ означать *сумму*); такъ что назвавъ v скорость Mѕ, будемъ имѣть Mѕ или $v = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$.

635. Хотя мы предположили всѣ силы и всѣ части системы находящимися въ одной плоскости; однако не трудно примѣтить, что этоже будетъ имѣть свою силу и тогда, когда онѣ будутъ находиться въ плоскостяхъ параллельныхъ между собою и перпендикулярныхъ къ оси коловращенія, только бы всѣ части системы были принуждены обращаться около прямой линеи или неподвижной оси.

636. А поелику всякое твердое тѣло, какой бы оно фигуры ни было, можно всегда принимать совокупленіемъ многихъ толстыхъ точекъ, тѣсно между собою соединенныхъ; то утвердимъ вообще, что - - -

Ежели тѣло L, *какой бы то фигуры ни было* (фиг. 105), *побуждаемое произвольнымъ числомъ разныхъ силъ, получитъ коловратное движеніе вокругъ неподвижной*

оси AB, лежащей внѣ того тѣла или въ немъ самомъ; то скорость коловращенія каждой его точки опредѣлится, когда раздѣлишь сумму моментовъ всѣхъ силъ (или моментъ составной) на сумму произведеній каждой части тѣла, умноженной на квадратъ разстоянія ея отъ оси коловращенія, и потомъ умножишь частное на разстояніе искомой точки отъ той же оси.

637. Положимъ G за центръ тяжести тѣла L (*фиг.* 106), и вообразивъ, что во время, какъ какая нибудь точка M обращаясь вокругъ C описываетъ въ мгновеніе безконечно малую дугу Mr, центръ тяжести G описываетъ дугу Gg перпендикулярно къ CG; проведемъ чрезъ точку g линею gk параллельную и равную съ CG. И такъ вмѣсто того чтобъ принимать тѣло вертящимся около C, можно допустить его перенесеннымъ параллельно къ самому себѣ со скоростію равною Gg, и въ самое то же время вообразить части его вертящимися около подвижной точки G съ такою скоростію, чтобъ по предположеніи $gk = GC$, точка k описывала дугу $kC = Gg$, ибо въ такомъ случаѣ точка C тѣла L остается равно неподвижною. А какъ тѣло остается свободнымъ, то составное движеніе изъ всего коловраще-

нія вокругъ подвижной точки G выходитъ равно нулю (289). Слѣд. составное движеніе, коимъ тѣло настояще будетъ возбуждено, представитъ не иное что, какъ такую силу, которую бы тѣло L получило, имѣя скорость Gg; то есть, сила эта должна быть перпендикулярна къ CGR и $= L \times Gg$, принявъ L за массу тѣла. А поелику части тѣла описываютъ подобныя дуги, то получимъ $CM : CG = Ms : Gg$; слѣд. $Gg = \frac{Ms \times CG}{CM}$; и слѣд. составная сила изъ всѣхъ движеній вокругъ C будетъ $= \frac{L \times Ms \times CG}{CM}$.

Но хотя сія составная сила выходитъ таковаже, какою бы она вышла, когда бы тѣло будучи свободнымъ получило въ центрѣ тяжести скорость Gg; однако не трудно примѣтить, что она не проходитъ чрезъ G, но по нѣкоторой точкѣ R линеи CG удаленной отъ G; потому что отдаленнѣйшія точки имѣютъ болѣе силы, и слѣд. составная должна проходить по одной сторонѣ съ центромъ тяжести относительно къ C, но совсѣмъ тѣмъ далѣе его. И такъ

представивъ чрезъ D' разстояніе CR, на которомъ проходитъ составная сила, получимъ $\frac{L \times Ms \times CG}{CM} \times D'$ моментомъ ея.

Естьли бы въ то же мгновеніе, какъ силы произведшія движеніе, начинали дѣйствовать на части тѣла, противуположена была имъ на разстояніи D' другая сила, равная опредѣленной теперь нами, то есть, равная цѣлому напряженію ихъ, то неминуемо должно произойти равновѣсіе; и въ такомъ случаѣ моментъ $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM}$ долженъ равняться моменту $R \times D$; а поелику (634) $R \times D = \frac{Ms}{CM} \int mrr$, то получимъ также $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM} = \frac{Ms}{CM} \int mrr$, и слѣд. $D' = \frac{\int mrr}{L \times CG}$.

И такъ изъ предложеннаго выходитъ, что . . .

638. *Ежели произвольное число силъ, имѣющихъ произвольное направленіе въ плоскостяхъ, къ которымъ ось коловращенія перпендикулярна, дѣйствуя на тѣло заставятъ его вертѣться около сей оси;* то 1е. *полученная тѣломъ сила будетъ равна массѣ его умноженной на скорость центра тяжести*, скорость, которая опредѣляется по объявленному (290); 2е. *эта сила будетъ перпендикулярна къ плоскости, проходящей по оси и чрезъ центръ тяжести;* 3е. *разстояніе ея отъ оси будетъ всегда одинаково и равно суммѣ произведеній каждой частицы тѣла на квадратъ разстоянія ея отъ оси, суммѣ раздѣленной на массу тѣла и умноженной на разстояніе центра тяжести отъ той же оси.*

639. Удерживая значеніе v скорости, съ какою опредѣленная точка M тѣла L стремится вертѣться по дѣйствію произвольнаго числа силъ или составной изъ нихъ R, естьли представимъ сверхъ того чрезъ r разстояніе какой нибудь частицы отъ оси коловращенія, и чрезъ m массу ея; то $\frac{rv}{CM}$ изобразитъ скорость коловращенія ея, а

$\frac{mrv}{CM}$ полученную силу, и слѣд. то сопротивленіе, которое она противуполагаетъ R по своему упорству (inertie); слѣд. $\frac{mrrv}{CM}$ будетъ моментомъ сего сопротивленія; слѣд. сумма моментовъ сопротивленій частицъ тѣла L противъ коловратнаго движенія K изобразится чрезъ $\int \frac{mrrv}{CM}$, или $\frac{v}{CM} \int mrr$, потому что оба сіи выраженія означаютъ одно и тоже; ибо v и CM остаются всегда одинаковы для каждой частицы m.

Отсюда явствуетъ, что при всѣхъ вещахъ одинаковыхъ, сопротивленіе частей тѣла противъ коловратнаго движенія увеличивается по мѣрѣ какъ $\int mrr$ становится больше.

640. Впередъ мы будемъ называть количество $\frac{v}{CM} \int mrr$ *моментомъ упорства* тѣла, а $\int mrr$ *показателемъ момента упорства*.

641. Скоро увидимъ, какъ опредѣляется показатель момента упорства во всякомъ

тѣлѣ; и опредѣливши его въ разсужденіи одной какой нибудь оси, не трудно послѣ здѣлать заключеніе о томъ, каковъ онъ долженъ быть въ разсужденіи всякой другой, параллельной съ первою. Мы намѣрены начать съ сего послѣдняго предмета.

642. И такъ положимъ, что AB (*фиг.* 107) представляетъ какую нибудь ось, A′B′ другую параллельную съ нею и такую, которая проходитъ чрезъ центръ тяжести тѣла; допустимъ m какою нибудь частицею сего тѣла, и вообразимъ чрезъ m плоскость mCC' перпендикулярную къ двумъ осямъ AB, A′B′; наконецъ по проведеніи mC, mC' и перпендикуляра mP на CC', линеи mC, mC' будутъ также перпендикулярны къ AB и A′B′.

Здѣлавъ это, мы получимъ по объявленному (*Алг.* 197), $(mC)^2 = (mC')^2 + (CC')^2 + 2CC' \times C'P$. Слѣд. $\int m \times (mC)^2 = \int m \times (mC')^2 + \int m \times (CC')^2 + \int 2m \times CC' \times C'P$. А поелику разстояніе CC' остается всегда одинаково для всякой частицы m; и потому $\int m \times (CC')^2$ тоже значитъ, что $(CC')^2 \times \int m$ или $(CC')^2 \times L$, по представленіи чрезъ L массы тѣла. По той же причи-

нѣ выраженіе $\int 2m \times CC' \times C'P$ будетъ одинаково съ $2CC' \int m \times C'P$; но $\int m \times C'P$ представляя сумму произведеній относительно къ плоскости, проходящей по $A'B'$, то есть, чрезъ центръ тяжести, должно (234) $= o$; слѣд. получаемъ просто $\int m \times (mC)^2 = \int m \times (mC')^2 + L \times (CC')^2$. И такъ *по извѣстному показателю* $\int m \times (mC')^2$ *момента упорства въ разсужденіи оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, опредѣляется показатель того же момента относительно ко всякой другой параллельной съ тою слѣдующимъ образомъ: должно прибавить къ первому произведеніе массы на квадратъ разстоянія обѣихъ сихъ осей.*

643. Послѣ сего и изъ выраженія скорости коловращенія, найденнаго (634), явствуетъ, что *изъ всѣхъ осей, около которыхъ можно заставить тѣло вертѣться по дѣйствію какой нибудь силы, скорость самая большая будетъ около тѣхъ, которыя проходятъ чрезъ центръ тяжести*; потому что показатель момента упорства относительно къ оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, выходитъ меньше всѣхъ, относящихся къ прочимъ осямъ.

644. Все выше изъясненное находится въ великомъ употребленіи, и содержитъ въ себѣ способъ, какъ сыскивать *центръ ударенія* и *центръ каченія* въ тѣлахъ, обращающихся около опредѣленной оси или около опредѣленной точки C (*фиг.* 108).

Подъ *центромъ ударенія* разумѣется такая точка R линеи CG, проведенной чрезъ неподвижную точку C и центръ тяжести G, гдѣ проходитъ составное движеніе коловращенія всѣхъ точекъ тѣла L; эта точка или центръ ударенія опредѣляется по объявленному (637).

645. Чтожъ принадлежитъ до *центра каченія*, то это такая точка R какого нибудь тѣла L (*фиг.* 108) или системы тѣлъ, которая удалена отъ C на количество равное длинѣ простаго маятника, какую онъ долженъ имѣть для розмаховъ своихъ въ то же время, какъ тѣло или система тѣлъ производитъ свои по силѣ тяжести. Мы намѣрены показать, что этотъ центръ одинаковъ съ центромъ ударенія.

Въ самомъ дѣлѣ что принадлежитъ до тяжести, то составная сила R, происходящая изъ дѣйствія тяжести на каждую ма-

теріальную часть тѣла, равняется всей массѣ умноженной на скорость, которую тяжесть сообщаетъ въ мгновеніе времени всякой матеріальной части, то есть, $R = g \times L$, по представленіи въ g сей скорости. Сверхъ того составная сила R проходитъ чрезъ центръ *тяжести* G, и слѣд. разстояніе ея отъ неподвижной точки C, или отъ оси проходящей по C, есть CN; слѣд. скорость коловращенія Mr, получаемая какою нибудь точкою M во время дѣйствія тяжести на тѣло, будетъ (636) $Mr = \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CM$; а для центра тяжести G, она будетъ $Gg = \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CG$.

А дабы простой маятникъ, имѣющій длиною CR, производилъ свои розмахи въ одно время съ тѣломъ L, то должно, по предположеніи сего послѣдняго удаленнымъ отъ вертикала на одинакое угольное количество съ CR, должно, говорю я, скорости сообщаемой ему тяжестію въ R (*фиг.* 109) перпендикулярно къ CR равняться скорости въ R (*фиг.* 108), то есть, должно этой скорости содержаться къ скорости въ G (*фиг.* 108) = CR : CG; но не трудно примѣтить,

что по раздѣленіи скорости Rl и g (фиг. 109), какую сообщаетъ тяжесть свободному тѣлу въ мгновеніе времени, на двѣ другія, на Rk по направленію прута Cr, и на другую Rr перпендикулярную къ CR, произойдетъ такая пропорція $Rl : Rr = CR : RS = CG : CN$; то есть, $g : Rr = CG : CN$, и слѣд. $Rr = \frac{g \times CN}{CG}$. И такъ надобно

$$\frac{g \times CN}{CG} : \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CG = CR : CG;$$

отсюда выходитъ $CR = \frac{\int mrr}{L \times CG}$ точно такая же величина, какую опредѣлили (644) для центра ударенія.

646. Поелику всѣ силы, дѣйствующія на тѣло L или на систему тѣлъ, принужденныхъ вертѣться около неподвижной точки или оси, производятъ въ этомъ тѣлѣ такую скорость, по дѣйствію которой какая нибудь точка M вертится со скоростію $Mr = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$; и при томъ этоже тѣло принуждено будучи послѣ вертѣться въ противную сторону со скоростію равною прежней, должно здѣлать со всѣми упомянутыми силами равновѣсіе; то заключимъ, что сила

R, могущая остановить движеніе вертящагося тѣла со скоростію, которая, положимъ, для какой нибудь опредѣленной точки M будетъ v: эта сила, которой направленіе проходитъ на разстояніи отъ C = D, должна имѣть моментъ R × D равной скорости точки M, раздѣленной на разстояніе CM, и умноженной на сумму произведеній частицъ на квадраты разстояній ихъ отъ C или отъ оси, проходящей по C. Въ самомъ дѣлѣ эта сила должна быть такова, которая бы могла произвесть въ тѣлѣ L, предполагая его въ покоѣ, опять ту же скорость; но этой скорости надобно быть въ семъ случаѣ $v = \dots$ $\frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$; отсюда выходитъ $R \times D = \frac{v}{CM} \times \int mrr$.

647. Ежели тѣло L, какой бы то фигуры ни было (*фиг.* 110), принужденное вертѣться около неподвижной точки C, или около оси проходящей чрезъ эту точку, которая впрочемъ можетъ занимать всякое мѣсто; ежели сіе тѣло, говорю я, получитъ ударъ перпендикулярно къ своей поверхности отъ другаго тѣла N: то можно по предыдущимъ правиламъ опредѣлить по ударѣ движеніе того и другаго слѣдующимъ образомъ.

Пусть V будетъ представлять скорость тѣла N по перпендикуляру TS прежде удара, v скорость

егоже по ударѣ; слѣд. $V - v$ изобразитъ скорость, а $N(V - v)$ количество движенія, которыхъ оно лишится отъ удара, и которыя перейдутъ въ тѣло L. Это количество движенія произведетъ въ L (636) такую скорость коловращенія, по силѣ которой точка T на примѣръ будетъ вертѣться со скоростію $v' = \frac{N(V-v) \times CS}{\int mrr} \times CT$, (по проведеніи CS перпендикулярно къ TS.)

Допустимъ, что безконечно малая дуга Tm, описанная изъ центра C изображаетъ эту скорость; и такъ здѣлавъ по тангенсу TA и по перпендикуляру TS параллелограмъ $TAmr$, примѣтимъ, что по принятіи скоростей TA и Tr вмѣсто скорости Tm, скорость TA не можетъ ни въ чемъ препятствовать скорости v тѣла N, но скорость Tr можетъ препятствовать скорости v, когда будетъ ее меньше; а поелику мы допускаемъ v такою скоростію, которую дѣйствительно M сохраняетъ по ударѣ; и потому должно $Tr = v$. Изъ подобія треугольниковъ CST и Trm выходитъ $CT : CS = Tm$ или $v' : Tr$; слѣд. $\frac{v' \times CS}{CT} = Tr = v$, и слѣд. $v' = \frac{v \times CT}{CS}$. И такъ вставивъ въ выведенномъ прежде уравненіи сію величину v', получимъ $\frac{v \times CT}{CS} = \ldots$ $\frac{N \times (V-v) \times CS}{\int mrr} \times CT$; отсюда выходитъ $v = \cdot$ $\frac{N \times V \times (CS)^2}{\int mrr + N \times (CS)^2}$; теперь не трудно здѣлать заключеніе о скорости коловращенія v'; ибо уравненіе $v' = \frac{v \times CT}{CS}$, изъ котораго выходитъ $v : v' = CS : CT$, показываетъ, что v есть скорость коловращенія точки

S; слѣд. точка S вертится со скоростію, которая остается въ N послѣ удара.

648. Отсюда явствуетъ, что опредѣленіе движеній вертящихся тѣлъ зивиситъ отъ опредѣленія величины $fmrr$. Но величину $fmrr$ не трудно найти, что мы и намѣрены теперь показать, какъ скоро свойство тѣла можно выразить уравненіями. Но ежели сего здѣлать не льзя, то можно всегда по крайней мѣрѣ раздѣлить тѣло на части, на примѣръ на параллелипипеды или парамиды и проч., которыхъ свойство можетъ изображено быть уравненіями; потомъ пріискавъ для каждой части величину $fmrr$, сложи всѣ сіи суммы, чрезъ то получишь цѣлую величину $fmrr$ для всего тѣла или системы тѣлъ. Посмотримъ сначала, какъ должно поступать въ такомъ случаѣ, когда свойство тѣла можно выразить уравненіямн.

649. Положимъ, что AB (*фиг.* 111) представляетъ ось коловращенія, и проведемъ чрезъ AB двѣ перпендикулярныя между собою плоскости. Допустимъ m какою нибудь частицею тѣла, и проведемъ mC перпендикуляръ къ AB, и mS перпендикуляръ къ плоскости AR. Естьли соединимъ C и S линеею CS, то эта линея будетъ перпенди-

кулярна къ AB, и слѣд. къ плоскости PQ. Въ прямоугольномъ треугольникѣ mSC выходитъ $(Cm)^2 = (CS)^2 + (mS)^2$; слѣд. $\int m \times (Cm)^2$ или $\int mrr = \int m \times (CS)^2 + \int m \times (mS)^2$. И такъ величина $\int mrr$ опредѣлится, когда сыщемъ сумму произведенiй частицъ на квадраты разстоянiй ихъ отъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, проходящихъ чрезъ ось коловращенiя. Но какъ скоро найдемъ Алгебраическое выраженiе сей суммы относительно къ одной плоскости, то нетрудно послѣ найти такое же выраженiе относительно къ другой плоскости. Посмотримъ теперь, какъ вообще находится сумма произведенiй частицъ тѣла на квадраты разстоянiй ихъ отъ извѣстной плоскости.

650. Должно вообразить сiе тѣло раздѣленнымъ на безконечно тонкiе слои, параллельные съ означенною плоскостью; и допустивъ что D*d* (*фиг.* 112) представляетъ высоту одного изъ слоевъ, назовемъ x разстоянiе CD отъ плоскости, а S поверхность слоя; въ такомъ случаѣ, поелику всѣ точки сей поверхности удалены отъ плоскости PQ на количество равное x, получимъ въ $xxSdx$ выраженiе произведенiй всѣхъ точекъ

сего слоя на квадраты разстояній ихъ отъ плоскости; и слѣд. $\int xxSdx$ означитъ всю сумму сихъ произведеній для цѣлаго тѣла.

Естьли представимъ также чрезъ x' разстоянія отъ плоскости перпендикулярной къ PQ и проходящей по оси коловращенія AB, и потомъ вообразивъ тѣло раздѣленнымъ на параллельные слои съ сею новою плоскостью, означимъ чрезъ S' поверхность одного изъ слоевъ; то получимъ равномѣрно въ $\int x'x'S'dx'$ выраженіе суммы произведеній частицъ на квадраты разстояній ихъ отъ этой второй плоскости. Такимъ образомъ $\int xxSdx + \int x'x'S'dx'$ представитъ сумму произведеній каждой части тѣла, умноженной на квадратъ разстоянія ея отъ оси AB.

651. Для приведенія на изъясненное нѣсколькихъ примѣровъ, положимъ, что тѣло представляетъ прямоугольной параллелипипедъ (фиг. 113) вертящійся около оси AB, перпендикулярной къ оси параллелипипеда и къ серединѣ бока его RS.

По свойству сего тѣла поверхность S должна быть постоянное количество; слѣд. интеграломъ $\int xxSdx$ будетъ $\frac{x^3S}{3}$, которой, во время какъ x становится равнымъ высотѣ MB или h параллелипипеда, обращается въ $\frac{h^3S}{3}$.

По той же причинѣ S′ есть постоянное количество, и интегралъ $\int x'x'S'dx'$ или $\frac{x'^3S'}{3}$ обращается въ $\frac{1}{8} \times \frac{h'^3S'}{3}$, когда $x' = \frac{1}{2}$ MN или $\frac{1}{2}h'$ (здѣсь MN предполагается $= h'$). А какъ плоскость, проходящая по оси, раздѣляетъ тѣло на двѣ равныя части, то обѣ половины будутъ состоять изъ $\frac{1}{4} \times \frac{h'^3S'}{3}$; и слѣд. цѣлая сумма произведенїй изобразится чрезъ $\frac{h^3S}{3} + \frac{h'^3S'}{12}$.

652. И такъ желая опредѣлить центръ качанїя или ударенїя, должно (644) раздѣлить это количество на массу параллелипипеда, умноженную на разстоянїе отъ центра тяжести его; то есть, на $hh'b \times \frac{1}{2}h$, гдѣ RM $= b$. Слѣд. выраженїемъ разстоянїя центра качанїя или центра ударенїя будемъ имѣть $\frac{2h^3S}{3h^2h'b} + \frac{h'^3S'}{6h^2h'b}$; или по причинѣ что $S = h'b$ и $S' = hb$, будемъ имѣть $\frac{2h}{3} + \frac{h'^2}{6h}$.

Естьли h' будетъ весьма малое количество относительно къ h, то разстоянїе сїе будетъ $= \frac{2h}{3}$. И такъ *центръ качанїя и центръ ударенїя какой нибудь прямой линеи или параллелограмма, вертящагося около бока своего, какъ оси, находится на $\frac{2}{3}$ разстоянїя отъ точки или оси коловращенїя.*

653. Представимъ себѣ, что тяжелый прутъ CA (*фиг.* 114) обращаясь около одного неподвижнаго

своего конца C, упадаетъ и встрѣчаетъ препятствіе T. Естьли пожелаемъ узнать, съ какою силою будетъ поражено препятствіе, то припомнимъ напередъ (436), что центръ тяжести B упадая по дугѣ BG пріобрѣтаетъ въ G такуюже скорость какъ бы эта точка падала по вертикалу BD. И такъ назвавъ *u* эту скорость, которую не трудно опредѣлить (176), а M массу прута, получимъ въ M*u* (637) количество движенія или силу прута; эта сила (644) поразитъ препятствіе T, когда оно будетъ находиться подъ центромъ ударенія P, то есть, на разстояніи $CP = \frac{2}{3}CA$.

Но ежели оно будетъ находиться во всякой другой точкѣ O, то раздѣли силу M*u* перпендикулярную къ CA на двѣ другія параллельныя съ нею, изъ которыхъ бы одна проходила чрезъ C, а другая чрезъ O; тогда сила, проходящая чрезъ O, изобразится (205) чрезъ $\frac{CP \times Mu}{CO}$.

Естьли препятствіе T будетъ подвижно, то будетъ всегда находиться такая точка на самой линеѣ CA или на продолженіи ея; гдѣ препятствіе повстрѣчавшись съ прутомъ, получитъ самую большую возможную скорость; то есть самую большую скорость изъ всѣхъ, какія бы оно должно получить отъ пораженія всякой другой точки прута.

654. Посмотримъ теперь, какъ должно опредѣлять эту точку; но прежде замѣтимъ разность между рычагомъ, находящимся въ движеніи и рычагомъ въ равновѣсіи.

Естьли рычагъ будутъ держать двѣ подпоры C и O, то чтобъ опредѣлить обремененіе каждой

подпоры, должно раздѣлить вѣсъ сего рычага, предположивъ его сосредоточеннымъ въ центрѣ тяжести G, на двѣ силы, изъ которыхъ бы одна проходила по C, а другая по O; послѣ чего найдемъ (205), что усилїе, употребляемое точкою C, будетъ $=$ . . $\frac{P \times GO}{CO}$, а точкою O будетъ $= \frac{P \times GC}{CO}$, P принимается здѣсь вѣсомъ рычага. Но ежели допустимъ рычагъ движущимся около точки C, тогда цѣлое усилїе не будетъ больше проходить по G, но (644) чрезъ центръ ударенїя P; такимъ образомъ усилїя обѣихъ точекъ C и O будутъ (205) въ такомъ случаѣ находиться въ обратномъ содержанїи съ разстоянїями CP и PO.

655. Допустимъ, что прутъ CA (*фиг.* 115), обращающїйся около точки C со скоростїю, которая, положимъ, для точки A будетъ u, поражаетъ на пути своемъ перпендикулярно свободное тѣло M′, удаленное отъ центра коловращенїя C на извѣстное количество BC; спрашивается, какую скорость получить M′?

Положимъ, что послѣ удара скорость u перемѣнилась въ v, и что тѣло M′ получило скорость v'.

И такъ (287), должно бы произойти равновѣсїю, когда бы прутъ обращаясь со скоростїю, равною для точки A количеству $u - v$, встрѣтилъ на пути своемъ стремящееся противъ его тѣло со скоростью v'.

Принявъ r за разстоянїе какой нибудь точки прута CA, котораго длина CA положимъ $= a$, получимъ въ $\frac{r\,(u - v)}{a}$ скорость коловращенїя той точ-

ки прута, по допущенїи, что точка A вертится со скоростью $u - v$. Когда же чрезъ m означимъ массу этой точки, то $\frac{mr\ (u-v)}{a}$ изобразитъ количество движенїя или силу ея, а $\frac{mrr\ (u-v)}{a}$ моментъ этой силы. Но по причинѣ равновѣсїя, должно (616) суммѣ моментовъ истощенныхъ силъ каждою точкою прута равняться моменту силы прїобрѣтенной тѣломъ M′; и слѣд. представивъ чрезъ b растоянїе CB, будемъ имѣть $\int\frac{mrr\ (u-v)}{a} = M'bv'$.

A дабы v' въ самомъ дѣлѣ было скоростїю M′ послѣ сраженїя, то должно v' равняться скорости коловращенїя точки B прута по ударѣ; ибо точка B и тѣло M должны двигаться по ударѣ на одно мгновенїе перпендикулярно къ CA. Но скорость B по сраженїи выходитъ $\frac{bv}{a}$; слѣд. $v' = \frac{bv}{a}$, и слѣд. $\int\frac{mrr}{a}$ $(u-v) = \frac{M'bbv}{a}$, или $(u-v)\int\frac{mrr}{a} = \frac{M'bbv}{a}$; отсюда выводимъ $v = \frac{u\int mrr}{M'bb + \int mrr}$ выраженїе скорости коловращенїя прута по сраженїи.

Что касается до скорости v' тѣла M′, то поелику $v' = \frac{bv}{a}$, получимъ ее $v' = \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{bu}{a}\int mrr}{M'bb + \int mrr}.$$

656. Положимъ p за растоянїе центра ударенїя прута; g за разстоянїе центра тяжести его от-

носительно къ точкѣ C, и M за массу его. Поелику (638) $p = \frac{\int mrr}{gM}$, то будемъ имѣть $\int mrr = pg$, и

слѣд. $v = \frac{pgMu}{M'bb + pgM}$, и $v' = \frac{pgbMu}{a\,(M'bb + pgM)}$.

657. Сія величина v' показываетъ, что ежели надобно ударить тѣло M' съ самою большою возможною силою, то это зависитъ отъ положенія его въ разсужденіи прута AC, ибо на разныхъ точкахъ B и удары будутъ разные. Въ самомъ дѣлѣ положивъ $b = o$, то есть, положивъ, что тѣло M' находится при точкѣ C, будемъ имѣть $v' = o$, и слѣд. тѣло не получитъ никакого движенія, въ чемъ нѣтъ ни малаго сомнѣнія. Но ежели дадимъ попеременно b усугубляющіяся величины, то v' будетъ возрастать до нѣкотораго только предѣла, и перешедъ оной начнетъ умаляться; ибо по допущеніи b безконечно увеличеннымъ, то есть, ежели вообразимъ CB безпредѣльно продолженнымъ безъ всякаго прибавленія въ массѣ, величина v' обратится въ $v' = \frac{pgbMu}{M'bb}$, или въ $v' = \frac{pgMu}{M'b}$ безконечно малое количество, или въ нуль. Отсюда явствуетъ, что дѣйствительно находится такая величина b, которая можетъ здѣлать v' самымъ возможно большимъ количествомъ.

А чтобъ ее опредѣлить, то должно приравнять къ нулю дифференціалъ величины v', принимая одно b перемѣннымъ. Поступая такимъ образомъ, найдемъ $bb = \frac{pgM}{M'}$, и $b = \sqrt{\left(\frac{pgM}{M'}\right)}$.

Положимъ D такою точкою, при которой вѣсъ тѣла M′ дѣйствуя снизу на верхъ посредствомъ блока I приводитъ вѣсъ прутіа CA въ равновѣсіе на подставкѣ C; въ сходственность сего выходитъ CD : CG = M : M′, или (представивъ CD чрезъ k) $k:g$ = M : M′; и $\frac{gM}{M'} = k$; слѣд. $b = \sqrt{(pk)}$. Слѣд. ∴

Ежели тѣло CA (фиг. 115) *обращаясь около неподвижной точки C ударитъ другое M′; то это послѣднее получитъ самое возможно большое количество движенія тогда, когда растояніе его CB отъ точки коловращенія выдетъ среднимъ пропорціональнымъ количествомъ между разстояніемъ центра ударенія ударяющаго тѣла и растояніемъ, на которомъ пораженнее здѣлаетъ вѣсомъ своимъ равновѣсіе съ вѣсомъ ударившаго.*

658. Естьли прутъ CA будучи вездѣ одинакой толщины, будетъ имѣть при томъ діаметръ весьма малой въ сравненіи съ длиною его, то p въ такомъ случаѣ $= \frac{2}{3}a$, и $g = \frac{1}{2}a$. Слѣд. $b = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2M}{M'}} = a\sqrt{\frac{M}{3M'}}$. И такъ ежели тѣло, получившее ударъ, будетъ вѣсомъ въ третью долю прута, то точка самаго большаго ударенія будетъ находиться при концѣ A прута. Она будетъ между C и A, когда 3M′ будетъ больше M; а далѣе A относительно къ C, когда M будетъ больше 3M′.

659. Естьли вставимъ въ величинѣ v' величину b, именно $b = \sqrt{\left(\frac{pgM}{M'}\right)}$, то произойдетъ $v' = \frac{u}{2a}\sqrt{\left(\frac{pgM}{M'}\right)}$.

660. Можно рѣшить предыдущїй вопросъ гораздо проще слѣдующимъ образомъ: этотъ способъ тѣмъ охотнѣе здѣсь помѣщаемъ, что онъ можетъ быть очень полезенъ во многихъ случаяхъ.

Поелику точка A должна по ударѣ перемѣнить скорость u коловращенїя своего въ v, то есть, должна лишиться скорости $u - v$, и потому центръ тяжести b потеряетъ скорость $\frac{g}{a}(u - v)$, а прутъ (638) потеряетъ количество движенїя или силу $\frac{Mg}{a}(u - v)$. Но эта сила, когда удержимъ предыдущїя названїя вещамъ, должна пройти чрезъ центръ ударенїя, то есть, на разстоянїи p точки C. А поелику должно произойти равновѣсїе между сею силою и количествомъ движенїя $M'v'$, которое прїобрѣтаетъ тѣло M', то должно (607) $\frac{Mgp}{a}(u - v) = M'bv'$, или по причинѣ что $v' = \frac{bv}{a}$, должно $\frac{Mgp}{a}(u - v) = \frac{M'lbv}{a}$; отсюда выходитъ $v = \frac{gpMu}{M'bb + gpM}$, и $v' = \frac{gpbMu}{a(M'bb + gpM)}$ такъ, какъ выше (656).

661. Возьмемъ шаръ вторымъ образомъ способа вычисленїя $\int mrr$.

Представленная выше чрезъ S площадь будетъ въ настоящемъ случаѣ кругъ, имѣющїй радїусомъ IM (*фиг.* 116), которой назовемъ y. И такъ принявъ $1 : c$ за содержанїе радїуса къ окружности, получимъ $\frac{cy^2}{2} = S$. Естьли положимъ $DI = z$, и r за радїусъ шара, то произойдетъ $y^2 = 2rz - zz$,

и слѣд. $S = \frac{c}{2}(2rz - zz)$. Наконецъ допустивъ DC $= a$, будемъ имѣть CI, или $x = z + a$, а $dx = dz$; слѣд. $\int x^2 S dx$ превратится въ $\int (z + a)^2 \times \frac{c}{2}$ . . $(2rz - zz)\,dz$, или по раскрытіи всего, въ $\int \frac{c}{2}$ . . $(2aarzdz + 4arz^2dz - aaz^2dz + 2rz^3dz - 2az^3dz - z^4dz)$; интеграломъ сего количества выходитъ $\frac{c}{2}$ . . . $(aarz^2 + \frac{4}{3}arz^3 - \frac{1}{3}aaz^3 + \frac{1}{2}rz^4 - \frac{1}{2}az^4 - \frac{1}{5}z^5)$, которой, когда $z = 2r$, превращается въ $\frac{c}{2}$ $(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{8}{5}r^5)$.

Для опредѣленія же величины $\int x'x'S'dx'$, не нужно дѣлать новой выкладки по причинѣ правильной фигуры шара, которая здѣлаетъ ее совершенно такою же; стоитъ только допустить, что количество a, изображающее разстояніе плоскости PQ отъ площади круга, превращается въ $-r$, то есть, допустить, что таже плоскость проходитъ чрезъ центръ шара перпендикулярно къ прежнему своему положенію; и мы получимъ $\frac{c}{2}$ $(\frac{4}{3}r^5 - \frac{8}{3}r^5 + \frac{8}{5}r^5)$, или по приведеніи $\frac{c}{2} \times \frac{4}{15} r^5$. Сумма обоихъ интеграловъ выходитъ $\frac{c}{2}$ $(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15} r^5)$.

А какъ толщина шара состоитъ изъ $\frac{c}{2} \times \frac{4}{3}r^3$, и растояніе центра тяжести его отъ плоскости PQ $= a + r$, то по раздѣленіи найденнаго результата на произведеніе послѣднихъ двухъ количествъ, бу-

демъ имѣть разстояніемъ CO центра качанія и ударенія $CO = \frac{a^2 + 2ar + \frac{7}{5}r^2}{a + r} = \frac{a^2 + 2ar + r^2 + \frac{2}{5}r^2}{a + r}$ $= a \times r + \frac{2}{5} \times \frac{r^2}{a + r} = CG + \frac{2}{5} \times \frac{(DG)^2}{CG}$. Отсюда явствуетъ, что центръ качанія и ударенія находятся ниже центра самаго шара, и что ихъ можно принять за сей послѣдній тогда только, когда радіусъ шара будетъ весьма малъ въ разсужденіи разстоянія центра G отъ точки прицѣпленія.

662. Естьли шаръ будетъ повѣшенъ на какомъ нибудь металлическомъ прутѣ, то желая обратить вниманіе и на массу того прута, должно припомнить найденное (651) $\frac{h^3S}{3} + \frac{h'^3S}{12}$ выраженіе суммы произведеній частицъ сего прута на квадраты разстояній ихъ отъ неподвижной точки или оси. А какъ h значитъ то, что мы разумѣемъ здѣсь подъ a; сверхъ того S (651) $= h'b$, и $S' = hb = ab$, то мы получимъ $\frac{a^3h'b}{3} + \frac{h'^3ab}{12}$. Сіе количество и то, которое относится къ шару, должны быть умножены на удѣльныя тяжести обѣихъ сихъ тѣлъ, когда онѣ будутъ разнаго вещества; и такъ назвавъ p и p' удѣльныя тяжести прута и шара, будемъ имѣть по прибавленіи двухъ произведеній, $p \times \frac{a^3hb}{3} + p \times \frac{h'^3ab}{12} + p' \times \frac{c}{2} \times (\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15}r^5)$ суммою произведеній частицъ всей системы на квадратъ разстояній ихъ отъ оси. Наконецъ раздѣливъ это количество на сумму $pah'b + p'\frac{c}{2} \times \frac{4}{3}r^3$, получимъ разстояніе центра качанія.

663. На практикѣ величина *ſmrr* довольно исправно опредѣлится и тогда, когда тѣло раздѣлишь на большое число частей, и умножишь по томъ каждую изъ частей на квадратъ разстоянія ея отъ оси.

664. Послѣ сего малаго отступленія, относящагося до опредѣленія величины *ſmrr*, возвратимся къ употребленію правила (636).

Доказали мы (289), что хотя какое нибудь тѣло L (*фиг.* 117) получаетъ впечатлѣніе и не по направленію, проходящему чрезъ центръ тяжести его G, однакожъ это впечатлѣніе въ цѣлости сообщается центру тяжести, которой движется параллельно съ направленіемъ RS, по коему тѣло получило впечатлѣніе; и въ самое то время части сего тѣла обращаются около центра тяжести такъ, какъ бы точка G оставалась неподвижною. И такъ ежели это тѣло по фигурѣ своей и по сообщеннымъ ему силамъ (которыхъ составную, положимъ, представляетъ R) можетъ обращаться около нѣкоторой оси, то поелику эта ось должна необходимо пройти чрезъ центръ тяжести, все сказанное нами выше будетъ имѣть и здѣсь свою силу, когда мы подъ *r* въ *ſmrr* будемъ разумѣть разстояніе какой нибудь частицы отъ оси, проходящей

чрезъ центръ тяжести, а подъ $R \times D$ моментъ силы R взятой относительно къ той-же оси; то есть, что центръ тяжести будетъ двигаться параллельно съ направленіемъ силы R, со скоростью $= \frac{R}{L}$, L означаетъ здѣсь массу тѣла. Естьлижъ проведемъ GS перпендикулярно къ RS, то назвавъ v скорость коловращенія S, получимъ $v = \frac{R \times GS}{\int mrr} \times GS$, или $v = \frac{R \times (GS)^2}{\int mrr}$ (636). Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

665. Положимъ, что тѣло N (*фиг.* 118) двигаясь ударило тѣло L по какому нибудь направленію CQ такъ, что тѣло L начало послѣ удара обращаться около оси, перпендикулярной къ плоскости, проходящей чрезъ центръ тяжести G и по перпендикуляру TS къ точкѣ прикосновенія T; требуется опредѣлить скорости послѣ удара и ихъ направленія, предполагая тѣло L находившимся въ покоѣ?

Вообразимъ плоскость, проходящую чрезъ точку прикосновенія T, и раздѣлимъ скорость тѣла N по CQ на двѣ другія: на одну по направленію CT перпендикулярному къ той плоскости, и на другую по направленію CI параллельному съ тою же плоскостью. Ежели бы тѣло N не имѣло другой скорости кромѣ CI, то бы оно въ движеніи своемъ здѣлало одно прикосновеніе къ L, но не сообщило бы ему никакого движенія, по крайней мѣрѣ, когда исключено будетъ треніе. И такъ сила удара совершается единствен-

но по направленію скорости CT. А какъ не трудно въ параллелограммѣ CTAI, котораго всѣ углы и діагональ CA предполагаются извѣстными, опредѣлить CT, то мы сочтемъ эту скорость данною и назовемъ ее V. Допустимъ v остальною скоростью въ N послѣ удара по тому же направленію CT или CS; слѣд. $V - v$ изобразитъ скорость, которой оно лишится, а $N \times (V - v)$ ту силу, которая перейдетъ въ тѣло L, и которую назвали мы R. И такъ центръ тяжести и всѣ части тѣла получатъ по направленію GM параллельному съ CS, скорость $= \frac{N \times (V - v)}{L} = v'$, означивъ ее чрезъ v'.

А поелику сила $N \times (V - v)$ не проходитъ по центру тяжести G тѣла L, то это тѣло принуждено будетъ обращаться около G, какъ бы эта точка оставалась неподвижною (289). Положимъ u за скорость коловращенія точки S гдѣ перпендикуляръ GS къ CS упадаетъ на эту послѣднюю линею; и мы получимъ (636) $u = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{N \times (V - v) \times (GS)^2}{\int mrr}$, или, по представленіи GS чрезъ D, $u = \frac{ND^2(V - v)}{\int mrr}$.

Замѣтимъ сверхъ сего, что по допущеніи тѣла N имѣющимъ дѣйствительно скорость v, надобно также допустить точку T тѣла L имѣющею туже самую скорость v по направленію TS; посмотримъ, съ какою скоростью эта точка движется по TS.

Она сначала будетъ двигаться со скоростью v', общею всѣмъ частямъ L. При томъ же ежели положимъ безконечно малую дугу Tm перпендикулярную

къ GT за скорость коловращенія T, то здѣлавъ параллелограммъ $Trmn$ по направленіямъ Tm, TA и TS, получимъ Tr вмѣсто скорости T по направленію TS въ силу ея коловращенія. Изъ подобія треугольниковъ Tmr, GTS выходитъ $GT : GS = Tm : Tr$; слѣд. $Tr = \frac{GS \times Tm}{GT}$. А поелику u означаетъ скорость коловращенія точки S, то будемъ имѣть $u : Tm = GS : GT$, и слѣд. $Tm = \frac{u \times GT}{GS}$; слѣд. $Tr = \frac{GS}{GT} \times \frac{u \times GT}{GS} = u$; слѣд. вся скорость точки T тѣла L по CS будетъ $v' + u$; и такъ должно $v' + u = v$.

Ежели изъ трехъ уравненій, найденныхъ для изображенія условій движенія, извлечемъ величины v u, и v', то получимъ $v = \frac{N(\int mrr + LD^2)V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$, $v' = \frac{NV\int mrr}{(N + L)\int mrr + LD^2N}$, $u = \frac{LND^2V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$.

Естьли разстояніе GS или D будетъ $= 0$, то есть, когда ударъ будетъ проходить по центру тяжести G; то скорость коловращенія $u = 0$, и скорости v и v' здѣлаются равны между собою и количеству $\frac{NV}{N + L}$, какъ тому и должно быть (352).

Естьли по опредѣленіи скорости v, присовокупимъ ее къ скорости CI, которая не претерпѣла никакой перемѣны, то получимъ совершенную скорость N и ея направленіе послѣ удара.

666. Когдажъ тѣло L будетъ само въ движеніи прежде сраженія, то должно въ такомъ случаѣ раз-

дѣлить скорость тѣла N прежде сраженія на двѣ другія, изъ которыхъ бы одна была равна и параллельна скорости L; эта скорость ничего не здѣлаетъ при ударѣ; со второюже поступай такъ, какъ мы поступали со скоростью по направленію CQ, почитая тѣло L находившимся въ покоѣ.

667. Естьли сравнимъ величину найденную для u съ величиною, опредѣленною (647) для скорости коловращенія; то обративъ вниманіе на разность значенія r въ каждомъ случаѣ, можно узнать разность между скоростью коловращенія свободнаго тѣла и такого, которое принуждено обращаться около опредѣленной точки или оси.

668. Когда тѣло L, какой бы то фигуры ни было (*фиг.* 119), получивъ побужденіе по направленію RS, которое не проходитъ чрезъ центръ тяжести, принимаетъ два движенія, о которыхъ мы упомянули (664); то не трудно примѣтить, что на одно мгновеніе можно допустить его имѣющимъ одно только движеніе, то есть, коловратное движеніе около неподвижной точки или оси C, которая глядя по фигурѣ тѣла и по разстоянію GS, на которомъ проходитъ движущая сила, можетъ находиться въ самомъ тѣлѣ или внѣ его. Въ самомъ дѣлѣ ежели во время какъ линея GS переносится параллельно сама къ себѣ изъ GS въ G′S′, вообразимъ ее обращающеюся около подвижной точки G,

то, поелику разныя точки тѣла имѣютъ тѣмъ болѣе скорости въ коловращенiи своемъ, чѣмъ болѣе удалены бываютъ отъ G, не трудно примѣтить, что на GS будетъ находиться такая точка C, которая опишетъ отъ C′ до C равную дугу GG′, дугу которую можно на мгновенiе принять прямою линеею; и тогда эта точка C отступитъ назадъ по коловратному движенiю тѣмъ больше, чѣмъ она больше подается впередъ параллельно съ GG′ по скорости общей всѣмъ частямъ; эта точка останется всегда въ C, которую по сей причинѣ можно на мгновенiе почитать неподвижною и такою, около которой обращается тѣло.

Ежели захотимъ опредѣлить положенiе точки C, то замѣтимъ, что можно почитать дуги CC′, S′I, которыя описываютъ точки C′ и S′ въ мгновенiе, прямыми линеями перпендикулярными къ GS или параллельными съ GG′; но изъ подобiя треугольниковъ CC′G′, G′S′I выходитъ $G'S' : G'C' = S'I : CC'$, или $GS : GC = S'I : GG'$; а какъ мы нашли скорость $GG' = \frac{R}{L}$, и скорость $S'I = \frac{R \times D^2}{\int mrr}$;

то GS или $D : GC = \frac{R \times D^2}{\int mrr} : \frac{R}{L}$; отсюда выходитъ $GC = \frac{\int mrr}{D \times L}$.

669. Точка C называется *произвольнымъ центромъ коловращенія*, потому что это такой центръ, которой тѣло само собою принимаетъ. Эта точка будетъ также въ точности центромъ качанія тѣла L, когда оно станетъ обращаться около неподвижной точки или оси, проходящей чрезъ S; ибо по $CG = \frac{\int mrr}{D \times L}$ заключаемъ, что $CS = GS + \frac{\int mrr}{D \times L} = \frac{L \times GS \times D + \int mrr}{D \times L} = \frac{L \times (GS)^2 + \int mrr}{GS \times L}$; а какъ $L \times (GS)^2 + \int mrr$ есть (641) въ точности то, что мы (637) принимали за $\int mrr$, и потому точка C будетъ здѣсь одинакова съ R, которую нашли мы (637).

670. Отсюда явствуетъ, что точка, около которой можно принимать тѣло обращающимся на одно мгновеніе времени, отнюдь не зависитъ отъ величины силы или силъ, сообщенныхъ тому тѣлу; и мы вообще за-

ключаемъ по величинѣ CG, что эта точка тѣмъ далѣе бываетъ, чѣмъ составная сила изъ всѣхъ будетъ дѣйствовать ближе къ центру тяжести.

671. Видѣли мы (644), что во время обращенія тѣла около неподвижной точки или оси, центръ ударенія его и центръ качанія бываютъ одинаковы, и опредѣляются одинакимъ дѣйствіемъ. Противное же сему примѣчаемъ въ свободномъ тѣлѣ. Положимъ, на примѣръ, что тѣло, котораго массу означаетъ L, обращается нѣкоторою своею точкою на извѣстномъ разстояніи a со скоростью v, и притомъ допустимъ, что центръ тяжести его движется со скоростью u. Во первыхъ нѣтъ сомнѣнія, что составная сила изъ всѣхъ движеній разныхъ частей тѣла, будетъ имѣть величиною $L \times u$ или Lu, то есть, такую величину, какъ бы тѣло не обращалось (289). Во вторыхъ разстояніе, на которомъ составная сила должна проходить въ разсужденіи центра тяжести, будетъ неминуемо равно тому, на какомъ бы сила равная Lu сообщила движимому одинакую скорость коловращенія съ настоящею; но эта скорость v имѣетъ (636) выраженіемъ $\frac{Lu \times D \times a}{\int mrr}$, D означаетъ искомое разстояніе;

слѣд. $v = \frac{LuDa}{\int mrr}$, и слѣд. $D = \frac{v}{u} \times \frac{\int mrr}{La}$; отсюда явствуетъ, что разстояніе центра ударенія въ свободномъ тѣлѣ зависитъ отъ содержанія скорости коловращенія къ скорости центра тяжести; и въ особенности оно уничтожается, когда уничтожается скорость коловращенія, чему и должно произойти.

И такъ не трудно опредѣлить точку, въ которой можно остановить свободное тѣло, обращающееся около самаго себя.

О Воротѣ въ горизонтальномъ и вертикальномъ его положеніи.

672. *Воротъ* бываетъ вообще машина, состоящая изъ колеса (*фиг.* 120) и вала цилиндрической фигуры, лежащаго на двухъ педпорахъ C и C, и проходящаго перпендикулярно сквозь колесо. Сила Q, сообщенная по касательному направленію къ окружности колеса, вертитъ его вмѣстѣ съ валомъ на подпорахъ C, C и взматываетъ на валъ разныя части веревки DP съ тяжестью P, которую нужно поднять или притянуть къ валу.

673. Иногда вмѣсто колеса употребляются *колки* E, E перпендикулярно набитые къ оси вала (*фиг.* 120 и 122), посредствомъ которыхъ сила производитъ такое же дѣйствіе. Въ другое же время на концахъ вала придѣлываются ручки Q, Q (*фиг.* 121), помощію которыхъ дѣйствуетъ движущая сила или силы.

674. Предыдущее описаніе ворота принадлежитъ *лежачему*; когда же ось вала бываетъ вертикальна (*фиг.* 122), тогда называется онъ *стоячимъ* (cabeſtan). Въ этомъ положеніи онъ употребляется по большой части тогда, когда нужно притягивать какія нибудь тяжести или вести суда.

675. Но вообще, какое бы расположеніе ни было сей машины, не трудно примѣтить, что дѣйствія силы и тяжести или препятствія, которое надобно преодолѣть, не находятся въ одной плоскости, но въ плоскостяхъ параллельныхъ, или весьма близко съ ними сходствующихъ. Передаваемая сила машинѣ имѣетъ два дѣйствія, изъ которыхъ одно производится на тяжесть, а другое на подпоры; посмотримъ, какъ эти два дѣйствія раждаются во время равновѣсія.

676. Представимъ машину, изображенную *фигурою* 120 въ такомъ видѣ, какой показываетъ (*фиг.* 123); а именно, представимъ валъ осью его CC, плоскость колеса чрезъ AMN, и наконецъ чрезъ BDL цилиндрическое сѣченіе вала плоскостью параллельною съ AMN, и проходящею по канату DP.

Естьли проведемъ радіусъ EA къ точкѣ A, въ которой сила Q дѣйствуетъ на колесо; и потомъ вообразимъ чрезъ CC и AE плоскость CEA, которая пересѣкается съ BDL по направленію IB, то это направленіе будетъ необходимо параллельно съ AE. Проведемъ AB и вообразимъ по этой линеѣ и по направленію AQ силы плоскость QAR, пересѣкающую ось CC въ какой нибудь точкѣ R. Наконецъ чрезъ B и R проведемъ BF и RG параллельныя линеи съ AQ.

По предположеніи сего, можно раздѣлить силу Q (208) на двѣ другія F и G, имѣющія направленіе по BF и RG; а какъ послѣдняя проходитъ по самой оси вала, то она и не можетъ произвести около ее никакого коловратнаго движенія, и слѣд. не помогаетъ ничего въ поддержаніи тяжести

P; слѣд. она вся истребляется на подпорахъ.

И такъ одна сила F можетъ здѣлать равновѣсіе съ тяжестію P. Но 1е эта сила имѣетъ направленіе въ той же плоскости BDL, въ какой производится дѣйствіе тяжести. 2е линеи BF и BI параллельны съ двумя прямыми AQ, AE составляющими прямой уголъ, и слѣд. BF должна быть перпендикулярна къ BI и служитъ тангенсомъ окружности BDL. И такъ можно почитать BID угловатымъ рычагомъ, котораго подпорная точка находится въ I; а какъ при томъ разстоянія BI, ID направленій двухъ силъ F и P отъ сей подпорной точки равны между собою, то обѣ силы должны быть также равны; слѣд. F = P. Посмотримъ теперь, какое имѣетъ содержаніе F къ Q.

Въ сходственность сказаннаго (205) получаемъ Q : F = BR : AR; но изъ подобія треугольниковъ RBI, RAE выходитъ BR : AR = BI : AE; слѣд. Q : F = BI : AE, или (потому что F = P), Q : P = BI : AE; то есть, *сила дѣйствующая воротомъ, содержится къ тяжести такъ, какъ радіусъ вала или цилиндра къ радіусу колеса.*

677. Естьли тяжесть P будетЪ привязана вЪ какой нибудь точкѢ B (*фиг.* 124) плоскости колеса, вЪ такой напримѢрЪ, вЪ которой бы перпендикулярЪ IB кЪ направленію ея былЪ равенЪ радіусу вала; то можно принимать AIB угловатымЪ рычагомЪ, коего подпорная точка будетЪ находиться вЪ центрѢ I; и вЪ такомЪ случаѢ для равновѢсія надобно (601), чтобЪ Q : P = BI : AI; то есть, между силою и тяжестію выходитЪ такое же содержаніе, какое нашли мы выше. СлѢд. *сила посредствомЪ ворота дѢйствуетЪ на тяжесть такЪ, какЪ бы онѢ находились вЪ одной плоскости.*

678. Что принадлежитЪ до обремененія подпорЪ, то оно измѣняется, глядя по разстоянію плоскости BLD (*фиг.* 123) отЪ плоскости колеса.

Но чтобЪ опредѢлить это обремененіе, то должно раздѢлить силу Q (принимая ее сообщенною вЪ E параллельно cЪ AQ) на двѢ силы параллельныя cЪ AQ, и проходящія чрезЪ C и C (208); потомЪ раздѢлить также тяжесть P, принимая ее повѢшенною вертикально вЪ I, на двѢ силы параллельныя cЪ PD и проходящія чрезЪ C и C. ПосредствомЪ сего найдемЪ, что каждую подпору

будутъ давить двѣ силы, коихъ величины и направленія извѣстны. Слѣд. не трудно послѣ для каждой подпоры привести тѣщу-щія ее силы въ одну извѣстной величины и направленія.

Этотъ способъ находить обремененіе подпоръ основывается на томъ, что двѣ силы F и P обращаются въ одну, дѣйствующую на точку I; естьли вообразимъ эту послѣднюю раздѣленною на двѣ другія параллельныя съ F и P и сообщенныя въ I, то онѣ не минуемо должны быть одинакой величины съ F и P. И такъ 1е можно принимать тяжесть P находящеюся въ I; 2е силы F и G, принимая первую собщенною въ I, а вторую въ R, должны здѣлать изъ себя составную равную Q, потому что G = F — Q, какъ то явствуетъ изъ предыдущаго раздѣленія; сверхъ того сія составная сила равная Q будетъ проходить чрезъ E, потому что RI : RE = RB : RA = Q : F (205).

679. Ежели сила будетъ дѣйствовать не по касательному направленію къ колесу, но посредствомъ ручекъ E, E (*фиг.* 120 и 122) перпендикулярно къ ихъ длинѣ, то содержаніе силы къ тяжести останется и тутъ одинаково съ предыдущими, когда вмѣсто

словѣ *радіусъ колеса* будемѣ употреблять *длину ручки*, длину щитаемую отѣ оси вала. Но естьли сила не будетѣ дѣйствовать перпендикулярно кѣ ручкѣ IE (*фиг.* 122), то вмѣсто сей ручки можно принять перпендикулярѣ IR, проведенный кѣ направленію силы; и такимѣ образомѣ сила кѣ тяжести будетѣ содержаться такѣ, какѣ радіусѣ вала кѣ IR.

680. Поелику (*фиг.* 123) Q : P = IB : AE, откуда выходитѣ Q × AE = P × IB; и потому должно заключить, что моментѣ силы бываетѣ равенѣ моменту тяжести; моменты сіи принимаются здѣсь относительно кѣ оси CC. Естьлижѣ вѣ одно время будетѣ употреблено нѣсколько силѣ по разнымѣ ручкамѣ, то должно суммѣ моментовѣ всѣхѣ силѣ равняться моменту тяжести.

681. Естьли канатъ, на которомъ виситъ тяжесть, или которой сообщаетъ препятствію дѣйствіе силы, будетъ наматываться на валѣ не цилиндрической, но конической фигуры, или вообще будетъ наматываться на такомъ валу, котораго діаметры безпрестанно перемѣняются, то и содержаніе силы къ тяжести будетъ также безпрестанно перемѣняться; и на оборотъ, естьли сила, которая должна дѣйствіе свое сообщать посредствомъ какой нибудь машины подобной трактуемой, измѣняяся непрестанно, должна совсѣмъ тѣмъ производить постоянно одинакое дѣйствіе, то для достиженія сего на-

добно дѣйствію ея относиться къ радіусамъ, которые бы становились тѣмъ длиннѣе, чѣмъ движущая сила начинаетъ уменьшаться больше. Такое дѣйствіе въ особенности мы замѣчаемъ въ часовыхъ пружинахъ, гдѣ движущая сила передается по концу арбора коробки Z (*фиг.* 125). Эта пружина, обернутая нѣсколько разъ около самой себя, прицѣпляется изъ нутри къ вогнутой поверхности коробки. Цѣпочка прикрѣпленная съ одной стороны къ выгнутой или наружной поверхности коробки, наматывается другимъ концомъ на фузею Y; при отпущеніи пружины коробка начинаетъ вертѣться и наматывать на себя цѣпочку съ фузеи Y; но какъ пружина по мѣрѣ отпущенія своего уменьшается въ силѣ, то для вознагражденія сего уменьшенія, располагаются діаметры фузеи при спускѣ послѣднихъ частей гораздо длиннѣе.

682. Кажется, что разсматривая всѣ сіи вещи со стороны одного равновѣсія, можно по волѣ уменьшать содержаніе силы къ тяжести, и привести въ состояніе самомалѣйшій вѣсъ на преодолѣніе самаго большаго посредствомъ ворота и принадлежащихъ къ нему машинъ. Но принимая въ разсужденіе движеніе относительно къ свойству употребляемыхъ силъ (agens), не можно увеличить дѣйствія произвольно; содержаніе радіуса вала къ радіусу колеса остается непроизвольное, но опредѣленное для произведенія самаго возможно-большаго дѣйствія.

Положимъ, напримѣръ, что сообщенное движеніе ручкѣ E (*фиг.* 122) производится со скоростью

V, а количество движенія, то есть, MV равно извѣстной массѣ M, возбужденной скоростію V. Положимъ также v за скорость, съ которою движетъ точку E сопротивленіе P, въ такомъ случаѣ представивъ чрезъ R ручку IE, а чрезъ r радіусъ вала, найдемъ скорость, которую P получитъ, по слѣдующей пропорціи $R : r = v : \frac{rv}{R}$; потому что точка E и та, въ которой касается веревка съ валомъ, имѣютъ пропорціональныя скорости съ разстояніями ихъ отъ оси. И такъ во время, какъ сила начинаетъ дѣйствовать, должно вообразить (287) скорость V составленною изъ скорости v, которая останется дѣйствительною, и скорости $V - v$ которая уничтожится; и что въ самое тоже время тяжесть P имѣетъ скорость . . $\frac{rv}{R}$, удерживающую свою силу, и скорость $\frac{rv}{R}$ въ противную сторону, которая уничтожается. То есть, что движущая сила обращенная въ силу $M(V - v)$ должна здѣлать равновѣсіе съ массою P, которой сила $= \frac{Pvr}{R}$. Слѣд. (676) $M(V - v) \times R = \frac{Prrv}{R}$; отсюда выходитъ $v = \frac{MVRR}{MRR + Prr}$. И такъ скорость $\frac{rv}{R}$ тяжести P будетъ . . . $\frac{MVrR}{MRR + Prr}$. Слѣд. чтобъ опредѣлить содержаніе между R и r для самой величайшей скорости P, должно (35) дифференціалъ этой величины приравнять къ нулю, дифференціалъ, въ которомъ одно только r принимается перемѣннымъ. Въ слѣдствіе чего получимъ $MVRdr\,(MRR + Prr) - MVRr \times 2Prdr = 0$; отсюда выходитъ $MRR = Prr$, и

слѣд. $r = R \sqrt{\frac{M}{P}}$. На примѣрЪ допустивЪ, что $M : P = 100000 : 1000$, получимЪ $r = R \sqrt{\left(\frac{1000}{100000}\right)} = R \times \frac{1}{10}$; то есть, радїусЪ вала долженЪ состоять изЪ десятой части колка IE, дабы могЪ дѣйствовать сЪ самою большою силою. Когда же увеличишь или уменьшишь колокЪ IE или радїусЪ вала, тогда лишишься желаемаго дѣйствїя.

683. Естьли допустимЪ, что тяжесть Q (*фиг.* 126), повѣшенная на окружности колеса, поднимаетЪ сама по себѣ тяжесть P повѣшенную на окружности вала, то можно здѣлать на это движенїе два слѣдующїе вопроса.

1е. *По извѣстной высотѣ, на которую должно поднять P, найти содержанїе R кЪ r такое, чтобЪ P могло подняться вЪ самомалѣйшее время.*

2е *По данному пространству, которое Q должно описать, найти содержанїе R кЪ r такое, чтобЪ P могло достигнуть самой большой высоты вЪ самомалѣйшее время.*

ПоложимЪ, что тяжесть сообщаетЪ свободному тѣлу скорость p вЪ секунду времени; и слѣд. pdt будетЪ та, которую она сообщитЪ ему вЪ мгновенїе dt.

ПоложимЪ также, что Q по истеченїи какого нибудь времени t начинаетЪ опускаться по тяжести своей со скоростью v, а $\frac{rv}{R}$ будетЪ та, сЪ какою P будетЪ двигаться. Естьли бы сїи тѣла были свободны,

то $V + pdt$ должно означать скорость Q въ послѣдующее мгновенїе, а $\frac{rv}{R} - pdt$ скорость P. Но какъ эти тѣла не свободны, то допустимъ, что скорость Q будетъ $v + dv$, а скорость P будетъ $\frac{r}{R}(v + dv)$, или $\frac{rv}{R} + \frac{rdv}{R}$. Слѣд. Q потеряетъ по дѣйствїю P скорость $pdt - dv$, а P по дѣйствїю Q прїобрѣтетъ скорость $\frac{rdv}{R} + pdt$. Но въ сходственность (287 и 676) надобно $QR(pdt - dv) = Pr\left(\frac{rdv}{R} + pdt\right)$; отсюда выходитъ $dv = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}pdt$.

Положимъ, что z означаетъ то пространство, которое Q опишетъ по истеченїи какого нибудь времени t; слѣд. $dz = vdt$, или $v = \frac{dz}{dt}$, а $dv = d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2} \times pdt$; или по умноженїи на $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz}{dt}\,d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}pdz$; обынтегралившъ это уравненїе, вывожу $\frac{1}{2}\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}pz$ такое, къ которому не прибавляю никакого постояннаго, потому что $\frac{dz}{dt}$ или скорость уничтожается, какъ скоро $z = o$, какъ тому и должно быть.

Изъ этого уравненія выходитъ $dt = \frac{dz}{\sqrt{2pz}} \cdot \sqrt{\left(\frac{QR^2 + Pr^2}{QR^2 - PRr}\right)}$; а по интеграціи $t = \sqrt{\frac{2z}{p}} \times \sqrt{\left(\frac{QR^2 + Pr^2}{QR^2 - PRr}\right)}$; слѣд. $\frac{z}{t} = \sqrt{\frac{pz}{2}} \times \sqrt{\left(\frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}\right)}$.

Положимъ, что P надобно поднять на высоту h; въ такомъ случаѣ $\frac{rz}{R} = h$, и слѣд. $z = \frac{Rh}{r}$, а $\frac{z}{t} = \frac{Rh}{rt} = \sqrt{\left(\frac{pRh}{2r}\right)}\sqrt{\left(\frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}\right)}$, или $\frac{h}{t} = \sqrt{p\frac{h}{2}} \sqrt{\left(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}$.

И такъ 1е. Естьли потребуется поднять P на извѣстную высоту въ самомалѣйшее возможное время, то по силѣ этого вопроса h остается постояннымъ, а $\frac{h}{t}$ должно изобразить *maximum*. Въ сходственность сего надобно дифференціалу количества $\sqrt{\frac{h}{2}}\sqrt{\left(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}$, принимая въ немъ h постояннымъ, а $\frac{r}{R}$ перемѣннымъ, или просто одно только r перемѣннымъ, равняться нулю. По такому условію выходитъ уравненіе $Q^2R^3 - 2PQR^2r - PQRr^2 = o$, или $QR^2 - 2PRr - Pr^2 = o$; отсюда не трудно здѣлать заключеніе о содержаніи R къ r.

2е Естьли жъ дано будетъ z, и потребуется во время какъ Q опишетъ пространство z, поднять

Р на самую большую высоту въ самомалѣйшее время; то должно въ такомъ случаѣ допустить $\frac{h}{t}$ *тахітит*, а *z* постояннымъ. Въ силу сего вопроса надобно, чтобъ по вставкѣ въ $V\frac{ph}{2}$ вмѣсто *h* величины его $\frac{rz}{R}$ и по допущеніи *z* постояннымъ, количество $V\left(\frac{prz}{2R}\right)\times V\left(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)$, или $V\left(\frac{pz}{2}\right)\times V\left(\frac{QRr^2 - PRr^3}{QR^3 + PRr^2}\right)$ изображало *тахітит*. Слѣд. надобно $d\left(\frac{QRr^2 - Pr^3}{QR^3 + PRr^2}\right) = o$; въ дифференціалѣ этомъ принимается одно только *r* перемѣннымъ. По такому допущенію выводимъ $2Q^2R^3 - 3PQR^2r - P^2r^3 = o$, и слѣд. не трудно послѣ заключить о содержаніи R къ *r*.

684. Въ вопросѣ, трактованномъ (682), мы не обращали вниманія на количество матеріи колеса, колковъ и вала. Но какъ эта матерія можетъ быть довольно велика, и слѣд. будетъ чувствительно уменьшать дѣйствіе силы, то чтобъ здѣлать совершенно вѣрное заключеніе о дѣйствіи силы и той скорости, которую она должна сообщить, надобно имѣть вниманіе и на сей предметъ, поступая (636).

Въ такомъ случаѣ надобно принимать массу Р (*фиг.* 122) и массы колковъ или колеса и вала за

одно тѣло, принужденное обращать я около неподвижной оси, то есть, около оси вала, почитая массу P лежащею на поверхности вала. Тогда назвавши $\int mr'r'$ сумму произведенiй частицЪ колеса и вала на квадраты разстоянiй ихЪ отЪ оси, получимЪ $v = \frac{MVRR}{MRR + Prr + \int mr'r'}$, которая будетЪ сходствовать сЪ найденною величиною (636) тогда только, когда количество $\int mr'r'$ будетЪ очень мало вЪ разсужденiи $MRR + Prr$.

685. ВЪ предыдущихЪ разсужденiяхЪ нашихЪ мы не обращали также нигдѣ вниманiя на толщину канатовЪ. Ежели она будетЪ довольно велика, то должно принимать вЪ такомЪ случаѣ за радiусы колеса и вала, настоящiе ихЪ радiусы, увеличенные радiусомЪ каната, почитая дѣйствiе сообщеннымЪ по оси его.

686. Много находится машинЪ, которыя можно вЪ цѣлости или отчасти относить кЪ вороту, и слѣд. кЪ рычагу; таковы суть *подъемЪ* (*фиг.* 127), *козлы* (*фиг.* 128) *зубчатыя колеса* (129) и всѣ прочiя машины которыми провертывается или пробивается что нибудь, хотя сiи послѣднiя заимствуютЪ свою силу часто отЪ другой машины, именно, отЪ наклоненной плоскости, которую мы скоро будемЪ разсматривать.

ВЪ подЪемѣ (*фиг.* 127) ось, на которую надѣвается ручка CRQ, имѣетЪ шестерню P, коей зубцы входятЪ вЪ зубчатый прутЪ AB. ЗубецЪ K шестерни оборачиваясь подпимаетЪ прутЪ AB посред-

ствомЪ смежнаго сЪ нимЪ зубца сЪ такою силою, которая содержится кЪ силѣ Q дѣйствующей ручкою, какЪ радїусЪ ручки кЪ радїусу шестерни; но какЪ радїусЪ шестерни бываетЪ весьма малЪ вЪ разсужденїи радїуса ручки, то можно помощїю сей машины поднимать довольно великїя тяжести посредственною силою.

Что принадлежитЪ до *козловЪ*, то мы особенно разсмотримЪ ихЪ, когда будемЪ говорить о тренїи вЪ блокахЪ и воротѣ.

687. Зубчатыя колеса находятся вЪ великомЪ употребленiи. Иногда посредствомЪ ихЪ увеличивается сила или скорость; иногда служатЪ онѣ кЪ перемѣнѣ направленiя движенiй; вЪ другое время употребляются кЪ приведенiю движенiй на извѣстные перiоды времени, или для того, чтобЪ здѣлать примѣтными движенiя или пространства, укрывающiяся отЪ зрѣнiя.

Естьли многiя зубчатыя колеса V, X, Y, Z (*фиг.* 129) будутЪ соединены между собою посредствомЪ шестерень *u*, *x*, *y*, *z*; то вотЪ какЪ можно опредѣлить содержанiе силы Q, сообщенной первому колесу, кЪ тяжести P, поднимаемой послѣднею шестернею.

Допустимъ R, R', R'', R''' радіусами колесъ, а r, r', r'', r''' радіусами шестерень ихъ. Послѣ чего принявъ усиліе, употребляемое зубцомъ какой нибудь шестерни на поднятіе зубца смежнаго съ нимъ колеса, самою силою, сообщенною тому колесу, и представивъ чрезъ E, E', E'' оныя усилія, получимъ (676) $Q:E = r:R$, $E:E' = r':R'$, $E':E'' = r'':R''$, $E'':P = r''':R'''$; но изъ этихъ пропорцій, умноживъ ихъ по порядку, выведемъ $Q:P = rr'r''r''':RR'R''R'''$; слѣд. должно заключить, что сила содержится къ тяжести такъ, какъ произведеніе радіусовъ всѣхъ шестерень къ произведенію радіусовъ всѣхъ колесъ; естьли, на примѣръ, радіусъ каждой шестерни въ десять разъ меньше радіуса смежнаго съ нимъ колеса, то сила равная одному фунту можетъ поднять тяжесть въ 10000 фунтовъ.

Впрочемъ надобно замѣтить, что употребленіе колесъ увеличиваетъ съ одной стороны силу, но съ другой уменьшаетъ скорость. Въ самомъ дѣлѣ, во время какъ колесо V здѣлаетъ кругъ, шестерня *и* здѣлаетъ его также, но она не больше пройдетъ зубцовъ въ колесѣ X, какъ сколько оныхъ въ ней самой находится; на примѣръ естьли колесо X будетъ о сорока осьми зуб-

цахъ, а шестерня *u* о шести только, то колесо X не повернется больше осьмой части своего круга въ то время, какъ колесо V здѣлаетъ цѣлое кругообращеніе; по этому разсуждать должно, что ходъ колѣса Y будетъ еще медленнѣе, и проч.

688. Посмотримъ теперь, какъ можно увеличить скорость въ данномъ содержаніи посредствомъ зубчатыхъ колесъ.

Положимъ, что зубчатое колесо V (*фиг.* 130) соединяется съ шестернею *u*; не трудно послѣ сего примѣтить, что во время цѣлаго круго-обращенія колеса V, шестерня повернется сама около себя столько разъ, сколько разъ число зубцовъ ея содержится въ числѣ зубцовъ колеса V; то есть, что во время кругообращенія колеса V, число кругообращеній шестерни *u* будетъ $\frac{N}{n}$, N и *n* означаютъ числа зубцовъ въ колесѣ и въ шестернѣ.

Естьли къ пятѣ шестерни *u* будетъ присоединяться колесо X съ шестернею *x*, то по той же причинѣ должно заключить, что во время кругообращенія колеса X, или

шестерни *u*, шестерня *x* здѣлаетъ оборотовъ $\frac{N'}{n'}$, N' и n' означаютъ число зубцовъ колеса X и пальцовъ шестерни *x*. И такъ при числѣ оборотовъ $\frac{N}{n}$ колеса X, то есть, во время одного оборота колеса V, шестерня *x* должна здѣлать оныхъ число $\frac{N'}{n'} \times \frac{N}{n}$ или $\frac{NN'}{nn'}$. Разсуждая такимъ образомъ, заключимъ, что при большемъ числѣ колесъ, число оборотовъ послѣдней шестерни должно изобразиться дробью, которой числителемъ будетъ произведеніе чиселъ зубцовъ всѣхъ колесъ, а знаменателемъ произведеніе чиселъ пальцовъ всѣхъ шестерень.

И такъ вопросъ, которымъ потребуется узнать, какъ велико должно быть число зубцовъ, и пальцовъ въ данномъ числѣ колесъ и шестерень, чтобъ скорость послѣдняго колеса содержалась къ первому въ извѣстномъ содержаніи, будетъ неопредѣленный, то есть, такой который можно рѣшить разными образами. Два слѣдующіе примѣра покажутъ намъ, какъ должно поступать съ такими вопросами.

Положимъ, что требуется опредѣлить, о сколькихъ зубцахъ должны быть два колеса V и X, и шестерни *u* и *x*, дабы во время одного кругообращенія колеса V, шестерня *x* повернулась 50 разъ. Въ сходственность сказаннаго $\frac{NN'}{nn'} = 50$. Слѣд. по условію вопроса извѣстно намъ одно только частное число изъ раздѣленія NN′ на *nn′*, но дѣлимое и дѣлитель неизвѣстны. Возьмемъ вмѣсто дѣлителя *nn′* произвольное число, состоящее изъ двухъ факторовъ не такъ большихъ и не такъ малыхъ, которые могли бы служить числами пальцовъ для двухъ шестерень. Здѣлаемъ на примѣръ $nn' = 7 \times 8 = 56$, полагая $n = 7$, а $n' = 8$. Въ такомъ случаѣ получимъ $\frac{NN'}{56} = 50$, или $NN' = 50 \times 56$. Но какъ факторы 50 и 56 не такъ велики, чтобъ не можно было употребить ихъ числами зубцовъ для каждаго колеса, то положивъ $N = 50$, будемъ имѣть $N' = 56$. Естьли жъ оба фактора или одинъ изъ нихъ будетъ очень великъ, то произведеніе ихъ должно разбить на новые факторы, и посмотрѣть, не выдутъ ли изъ нихъ нѣкоторые меньше прежнихъ; въ противномъ же случаѣ должно взять другое число за *nn′*.

Предложимъ для втораго примѣра слѣдующій вопросъ. Надобно опредѣлить для трехъ колесъ и трехъ шестерень такое число зубцовъ и пальцовъ, чтобъ послѣдняя шестерня дѣлала кругообращеніе въ 12 часовъ, а первое колесо въ годъ.

Настоящій годъ состоитъ изъ 525949 минутъ, а 12 часовъ изъ 720 минутъ; отсюда явствуетъ, что во время кругообращенія перваго колеса, послѣдняя шестерня должна повернуться $\frac{525949}{720}$ разъ; слѣд.

$\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720}$. ДопустимЪ $n = 7$, а $n' = 8$. Послѣ чего $\frac{NN'N''}{7 \times 8n''} = \frac{525949}{720}$, или $NN'N'' = \frac{525949}{720} \times 7 \times 8n'' = \frac{3681643\,n''}{90}$. А какЪ $NN'N''$ должно быть цѣлое число, то для исправнаго рѣшенія сего вопроса надобно взять вмѣсто n'' такое число, которое бы могло равно содержать вЪ себѣ 90; но такое число весьма велико для числа пальцовЪ шестерни, и потому посмотримЪ, не можно ли по убавленіи или прибавленіи нѣкотораго малаго числа единицЪ кЪ числителю послѣдней дроби, здѣлать ее цѣлымЪ количествомЪ; и какЪ это число весьма малую здѣлаетЪ перемѣну вЪ настоящей величинѣ $NN'N''$, то можно его принять за произведеніе.

И такЪ возмемЪ q за малое число единицЪ, которое нужно вычесть изЪ числителя, а t за цѣлое, которое должно по окончаніи дѣйствія выттн величиною $NN'N''$; вЪ сходственность чего будемЪ имѣть $\frac{3681643\,n'' - q}{90} = t$, или $40907\,n'' + \frac{13n'' - q}{90} = t$.

Но надобно величинѣ $\frac{13\,n'' - q}{90}$ состоять изЪ цѣлаго числа; представимЪ оное чрезЪ s. Послѣ чего $\frac{13n'' - q}{90} = s$, или $n'' = \frac{90s + q}{13} = 6s + \frac{12s + q}{13}$. Дѣлаю $\frac{12s + q}{13} = r$, и нахожу $s = \frac{13r - q}{12} = r + \frac{r - q}{12}$. НаконецЪ дѣлаю $\frac{r - q}{12} = k$, и получаю $r = 12k + q$. Слѣд. $s = 13k + q$, а $n'' = 90k + 7\,q$. А какЪ надобно, чтобЪ n'' было не большое число,

то полагаю $k = o$, и дѣлаю q равнымъ самомалѣйшему цѣлому числу, то есть, дѣлаю его $= 1$. Послѣ чего $n'' = 7$, а t или $NN'N'' = 286350$. Теперь остается узнать, можно ли раздѣлить это число на три фактора такіе, которые можно бы употребить числами зубцовъ N, N', N''; но это можно здѣлать, потому что тремя факторами сего числа будутъ 50, 69 и 83, которые не такъ велики для настоящаго предмета. И такъ можно всячески разспложить три колеса о 50, 69 и 83 зубцахъ, и три шестерни о 7, 7 и 8 пальцахъ.

Естьли жъ не можно будетъ найденное такимъ образомъ число разбить для $NN'N''$ на приличные факторы; то должно снова начать выкладку принимая вмѣсто q или n или n' другія величины.

Хотя рѣшеніе, выведенное съ опущеніемъ нѣскольких единицъ, не будетъ настоящее, а приближенное только, однако можно щитать его довольно вѣрнымъ. Ибо въ настоящемъ случаѣ число оборотовъ послѣдней шестерни во время одного обращенія перваго колеса будетъ $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{286350}{7 \times 7 \times 8}$; естьли это количество умножишь на 12 часовъ, то есть, на продолженіе каждаго оборота, то получимъ за продолженіе кругооращенія перваго колеса 365д 5ч. 48′ 58″ $\frac{38}{45}$; но мы положили годъ состоящимъ изъ 365д, 5ч. 49′.

О Равновѣсіи на плоскостяхъ.

689. Естьли тѣло P (*фиг.* 131), какой бы оно фигуры ни было, касаясь плоскости XZ въ одной какой нибудь точкѣ C,

будетъ побуждаемо единственною силою, то оно не можетъ остаться неподвижнымъ кромѣ двухъ слѣдующихъ случаевъ: 1е когда направленіе AD единственной побудительной силы будетъ перпендикулярно къ плоскости XZ; 2е Когда этоже направленіе будетъ проходить по точкѣ C, гдѣ касается тѣло съ плоскостью.

Что первое допущеніе необходимо нужно, въ томъ нѣтъ никакого сомнѣнія. Чтожъ принадлежитъ до втораго, то и оно не меньше нужно, потому что естьли направленіе AD тѣла P′ на примѣръ, хотя впрочемъ и перпендикулярное къ плоскости, не будетъ проходить по точкѣ прикосновенія C; то сопротивленіе плоскости, дѣйствующее единственно по перпендикуляру къ точкѣ C, не будетъ прямо-противуположно силѣ AD, и слѣд. не можетъ ее уничтожить, хотябы сопротивленіе и равнялось этой силѣ.

690. Когда же тѣло будетъ касаться плоскости не одною точкою, но разными многими, или какою нибудь плоскою поверхностью (*фиг.* 132 и 133), тогда нѣтъ большой надобности, чтобъ единственная сила AD проходила по какой нибудь изъ

тѣхъ точекъ; но довольно и того, когда она будетъ перпендикулярна къ плоскости, и можетъ раздѣлиться на столько перпендикулярныхъ силъ къ плоскости, сколько находится на сей послѣдней прикосновенныхъ точекъ къ тѣлу. Естьли на примѣръ тѣло P (*фиг.* 132) будетъ касаться поверхности въ двухъ точкахъ C и C′, и сила AD не будетъ находиться въ плоскости, проходящей по перпендикулярамъ поставленнымъ изъ точекъ C и C′; то равновѣсіе не можетъ произойти, потому что силу AD не льзя раздѣлить на другія силы, проходящія по C и C′ такъ, чтобъ не вышло третей, которую нужно удерживать.

Словомъ, надобно единственной силѣ, дѣйствующей на тѣло, быть перпендикулярной къ плоскости и проходить между какими нибудь точками, къ которымъ прилегаетъ тѣло.

Такъ на примѣръ, человѣкъ стоящій на ногахъ прямо, пребываетъ въ равновѣсіи, хотя направленіе тяжести его и не проходитъ по ногамъ, но между ими; однакожъ эта сила раздѣляется на двѣ другія параллельныя съ нею, изъ которыхъ каждая проходитъ по ногамъ и уничтожается.

691. И такъ ежели тѣло, касающееся плоскости въ одной или во многихъ точкахъ, будетъ побуждаемо многими силами произвольнаго направленія; то надобно для равновѣсія его, 1е всѣмъ силамъ быть такого свойства, чтобъ можно было привести ихъ въ одну, которая была бы перпендикулярна къ плоскости; 2е чтобъ эта послѣдняя сила, ежели въ случаѣ она не будетъ проходить по какой нибудь точкѣ прикосновенія, не оставляла всѣхъ ихъ по одну сторону.

692. Естьли единственная сила, побуждающая тѣло, будетъ сама тяжесть, то надобно въ такомъ случаѣ или плоскости быть горизонтальной, или проходить вертикалу, проведенному чрезъ центръ тяжести тѣла, по какой нибудь точкѣ изъ прикосновенныхъ; когдажъ этотъ вертикалъ и не будетъ проходить такимъ образомъ, то надобно по крайней мѣрѣ, чтобъ онъ не оставлялъ всѣхъ точекъ съ одной стороны.

693. И такъ ежели тѣло будетъ побуждаемо двумя силами, то надобно: 1е чтобъ эти двѣ силы находились въ одной плоскости; 2е чтобъ плоскость была перпендикулярна къ той, на которой держится тѣло; 3е чтобъ составная сила, должен-

ствующая непремѣнно быть перпендикулярною, не оставляла всѣхъ прикосновенныхъ точекъ съ одной стороны.

Когда же изъ этихъ двухъ силъ будетъ одна тяжесть, то надобно при томъ обѣимъ имъ находиться въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ центръ тяжести тѣла.

694. Посмотримъ теперь, какое находится вообще отношение между двумя силами, удерживающими тѣло на плоскости въ равновѣсіи.

Положимъ CQ, CP (*фиг.* 134) направленіями этихъ двухъ силъ, и вообразимъ, что AB представляетъ сѣченіе плоскости тѣхъ же двухъ силъ съ плоскостью, на которой держится тѣло. По проведеніи перпендикуляра CH на AB, здѣлаемъ изъ этой линеи и направленій CQ, CP, принявъ первую за діагональ, а послѣднія боками, параллелограммъ CEDF. А дабы составная сила изъ двухъ Q и P имѣла направленіе по CD или CH, то надобно (191) двумъ силамъ Q и P содержаться между собою, какъ CF : CE; тогда обѣ силы P и Q и гнѣтеніе ихъ на плоскость, которое представимъ чрезъ H,

будутъ таковы, что Q : P : H = CF : CE : CD.

695. По доказанному (201) будемъ имѣть также Q : P : H = *син.* ECD : *син.* FCD : *син.* ECF.

696. Естьли возьмемъ на AB произвольно двѣ точки A и B, и проведемъ перпендикуляры AG, BG на направленія обѣихъ силъ P и Q; то бока треугольника AbG выдутъ отъ того перпендикулярны къ бокамъ треугольника CDE, и слѣд. оба треугольника сіи будутъ подобны между собою (*Геом.* 111). Въ сходственность чего получимъ AG : BG : AB = DE или CF : CE : CD; то есть, (694) = Q : P : H; слѣд. AG : BG : AB = Q : P : H.

697. А какъ (*Геом.* 303) AG : BG : AB = *син.* ABG : *син.* BAG : *син.* AGB, то получимъ также Q : P : H = *син.* ABG : *син.* BAG : *син.* AGB. И такъ когда будутъ только дѣйствовать двѣ силы на тѣло, удерживая его въ равносіи на плоскости, то по проведеніи новыхъ двухъ плоскостей перпендикулярныхъ къ тѣмъ силамъ, обѣ сіи силы и давленія на первую плоскость изобразятся синусомъ угла, заключающагося между плоскостями перпендикулярными къ силамъ.

698, Поелику выведенныя содержанія остаются дѣйствительны всегда, какого бы свойства ни были двѣ силы P и Q, то содержанія сіи будутъ дѣйствительны также, когда одна изъ силъ, на примѣръ P будетъ состоять изъ тяжести; въ такомъ случаѣ надобно только плоскости BG быть горизонтальной.

699. Продолжимъ направленіе силы Q (*фиг.* 134) до пересѣченія его съ плоскостью BA въ точкѣ I.

Поелику $Q : P : H =$ *син.* ABG : *син.* BAG : *син.* AGB, то получимъ $Q : P =$ *син.* ABG : *син.* BAG; и какъ при томъ *син.* BAG $=$ *син.* KAI $=$ *кос.* KIA, потому что GK есть перпендикуляръ на направленіе силы, то будемъ имѣть также $Q : P =$ *син.* ABG : *кос.* KIA. Но ABG представляетъ склоненіе плоскости AB къ горизонту, а KIA склоненіе силы къ плоскости AB; слѣд. *при равновѣсіи тѣла на наклоненной плоскости сила содержится къ тяжести такъ, какъ синусъ склоненія плоскости къ горизонту, къ косинусу склоненія силы въ разсужденіи самой плоскости.*

700. Отсюда можно заключить, что двѣ силы Q и R (*фиг.* 135) будутъ способны удержать въ равновѣсіи одинакой вѣсъ на одинакой плоскости тогда, когда будутъ

взаимно пропорціональны косинусамъ угловъ, составленныхъ изъ направленій силъ и длины плоскости.

Въ самомъ дѣлѣ по причинѣ равновѣсія Q съ тяжестью P, можно послать Q : P = *син.* ABG : *кос.* SKB; равнымъ образомъ можно послать P : R = *кос.* RIA : *син.* ABG, потому что R предполагается способною здѣлать равновѣсіе съ P; слѣд. по взаимномъ умноженіи членовъ сихъ двухъ пропорцій выходитъ Q : R = *кос.* RIA : *кос.* SKB.

701. Изъ доказаннаго (695), что Q : P : H (*фиг.* 136) = *син.* ECD : *син.* FCD : *син.* ECF, можно заключить Q : P = *син.* ECD : *син.* FCD, или = *син.* HCP : *син.* HCQ. Слѣд. ежели по извѣстнымъ тяжести P, силѣ Q и углу HCP, составленному изъ направленія тяжести P и перпендикуляра къ плоскости, надобно будетъ опредѣлить уголъ, заключающійся между направленіемъ силы Q и тѣмъ же перпендикуляромъ, то получимъ его по пропорціи, изъ которой выходитъ такое уравненіе $син.\ HCQ = \frac{P \times син.\ HCP}{Q}$. Но какъ опредѣливши уголъ по его синусу, можно (*Геом.* 279) произвольно взять изъ таблицъ за величину его тотъ же самой уголъ или до-

полненіе его ко 180°, то должно заключить, что тяжесть можетъ быть удерживаема на плоскости одинакою силою, имѣющею двоякое направленіе. Но эти направленія должны быть таковы, чтобъ два угла HCQ и HCQ, составленные изъ нихъ и перпендикуляра CH, служили одинъ другому дополненіемъ ко 180°; а какъ по продолженіи перпендикуляра HC къ I, большой изъ этихъ двухъ угловъ HCQ служитъ дополненіемъ углу QCI, то онъ долженъ быть равенъ меньшому HCQ; и такъ *два направленія, по которымъ одинакая сила можетъ поддерживать тяжесть въ равновѣсіи на плоскости, склоняются равно въ разсужденіи перпендикуляра, поставленнаго къ той плоскости, и слѣд. въ разсужденіи самой плоскости*; онѣ при томъ упадаютъ всегда на плоскость со стороны перпендикуляра, противной направленію тяжести тѣла.

702. Естьли въ той же пропорціи Q:P = *син.* HCP : *син.* HCQ вставимъ вмѣсто угла HCP, склоненіе плоскости ABG равное тому углу, какъ то не трудно примѣтить, потому что оба сіи угла служатъ дополненіями къ 90° вертикальнымъ угламъ BRP, CRH; то получимъ Q : P = *син.* ABG : *син.* HCQ,

и слѣд. $Q = \frac{P \times \text{син. } ABG}{\text{син. } HCQ}$. И такъ при одномъ и томъ же сконеніи плоскости и при одной и той же тяжести сила Q должна быть тѣмъ менѣе, чѣмъ синусъ склоненія ея въ разсужденіи перпендикуляра будетъ больше; а поелику самой большой синусъ есть 90°, то утвердимъ, что *самое легчайшее для силы направленіе къ удержанію тяжести на наклоненной плоскости будетъ параллельное съ оною плоскостью.*

703. Въ этомъ случаѣ пропорція Q:P = *син.* ABG : *син.* HCQ превращается въ Q : P = *син.* ABG : 1 или къ радіусу. Но естьли изъ точки A (*фиг.* 137) опустимъ перпендикуляръ AL на горизонталъ BG, то въ прямоугольномъ треугольникѣ ALB получимъ *син.* ABG : 1 = AL : AB; слѣд. Q : P = AL : AB; то есть, *параллельная сила съ плоскостью содержится къ тяжести, какъ высота плоскости къ длинѣ ея.*

704. Естьли направленіе силы будетъ горизонтально (*фиг.* 138), то уголъ HCQ сдѣлается равенъ углу BAL, какъ это не трудно примѣтить; и слѣд. получимъ Q : P = *син.* ABG или *син.* ABL : *син.* BAL; то

есть, (*Геом.* 303) = AL : BL. Слѣд. *когда направленіе силы бываетъ параллельно съ основаніемъ наклоненной плоскости, тогда сила содержится къ тяжести, какъ высота плоскости къ основанію.*

705. Вообще пропорц[illegible] : P = *син.* ABG : *син.* HCQ (*фиг.* 134) показываетъ, что сила выходитъ всегда тѣмъ меньше, чѣмъ склоненіе плоскости къ горизонту, и въ тоже время склоненіе силы къ плоскости будутъ меньше; ибо чѣмъ меньше будетъ сіе послѣднее склоненіе, тѣмъ болѣе уголъ HCQ дополненіе онаго будетъ приближаться къ 90°.

706. Мы ничего не сказали о точкѣ, по которой направленіе силы должно сообщаться съ тѣломъ. Эту точку не можно опредѣлить иначе, кромѣ что направленіе силы должно пересѣкаться съ вертикаломъ, проведеннымъ черезъ центръ тяжести тѣла въ такой точкѣ, откуда бы перпендикуляръ, опущенный на плоскость, имѣлъ выше упомянутыя условія (689 и слѣд.). По этой то причинѣ увѣряемся, что шаръ состоящій изъ однороднаго вещества можно удержать на наклоненной плоскости тогда только, ког-

да направленіе силы будетъ проходить по центру фигуры его, которой также служитъ и центромъ тяжести его.

707. Ежели для удержанія тяжести вмѣсто одной силы будетъ употреблено нѣсколько, тогда все сказанное нами о силѣ Q, должно въ точности относить къ составной изъ данныхъ многихъ.

На примѣръ естьли тѣло P (*фиг.* 139) будетъ удерживаемо на наклоненной плоскости сложнымъ дѣйствіемъ силы R съ сопротивленіемъ неподвижной точки B, къ которой привязана веревка BOR, обхватывающая тѣло; то должно въ такомъ случаѣ вообразить чрезъ точку стеченія S обоихъ концовъ BH, RD веревки, линею SC такую, которая бы раздѣляла по поламъ уголъ RSB. Ежели эта линея пересѣчетъ вертикалъ проведенный чрезъ центръ тяжести P, въ точкѣ C, откуда можно опустить на плоскость перпендикуляръ къ точкѣ прикосновенія H; то равновѣсіе должно произойти, и содержаніе тяжести P къ усилію по SC опредѣлится по вышеизъясненному. Чтожъ касается до содержанія усилія по SC къ силѣ R, то оно будетъ одинаково съ тѣмъ, какое выве-

дено для подвижнаго блока (584). И такъ въ случаѣ параллельности силы R съ плоскостью, тяжесть P будетъ содержаться къ силѣ R, какъ длина плоскости къ половинѣ ея высоты; то есть, сила должна быть въ половину меньше той, какая бы способна удержать тѣло на той же плоскости безъ неподвижной точки B.

708. Что принадлежитъ до цѣлаго гнетенія, которое производитъ тяжесть на плоскость, то его можно весьма удобно опредѣлить по выведеннымъ содержаніямъ. Но частныя давленія на каждую точку, о которыя опирается тѣло на плоскости, совсѣмъ не опредѣленны, кромѣ одного случая; и именно, когда тѣло касается плоскости двумя точками, тогда цѣлое гнетеніе раздѣляется по этимъ двумъ точкамъ въ обратномъ содержаніи разстояній направленія его отъ оныхъ. Во всякомъ же другомъ случаѣ извѣстно только слѣдующее. 1е что сумма частныхъ гнетеній равна цѣлому; 2е что сумма моментовъ ихъ взятая относительно къ оси перпендикулярной къ направленію цѣлаго гнетенія, должна быть равна нулю, и тоже самое разумѣется о суммѣ моментовъ относительно къ другой оси перпендикулярной къ первой. И такъ ежели положенное

тѣло на плоскости, будетъ соединяться съ нею гладкою поверхностью, то мы не имѣемъ никакой причины заключать, чтобъ всѣ прикосновенныя точки къ плоскости ощущали одинакое давленіе, развѣ когда тѣло будетъ имѣть фигуру прямой призмы или прямаго цилиндра.

709. Ежели сила, удерживающая тяжесть P (*фиг.* 140) въ равновѣсіи на плоскости AB, будетъ сама состоять изъ тяжести Q, держащейся на наклоненной плоскости AC и влекущей первую посредствомъ веревки MN; то содержаніе между сими двумя тяжестями можно опредѣлить по изъясненному (696).

Поелику напряженіе веревки MN должно здѣлать равновѣсіе съ тяжестью P и потому проведши изъ точки A перпендикуляръ AD на MN, получимъ (696) P : T = BD : AD, назвавъ T оное напряженіе. Но напряженіе веревки отъ M къ N одинаково съ напряженіемъ ея отъ N къ M, дѣлающимъ равновѣсіе тяжести Q; слѣд. будемъ имѣть также T : Q = AD : CD. По умноженіи сходственныхъ членовъ обѣихъ сихъ пропорцій, выходитъ P : Q = BD : CD; то есть, тяжести сіи содержатся между собою, какъ части основанія BC, опредѣленныя перпендикуляромъ,

проведеннымъ изъ верху взаимнаго стеченія плоскостей на направленіе веревки.

710. Естьли веревка будетъ проходить по блоку, какъ явствуетъ (*фиг.* 141), то содержаніе двухъ тяжестей опредѣлится по изъясненному (699).

Ибо по проведеніи изъ точки A перпендикуляра AD на онованіе, и линей AE, AF параллельныхъ съ концами веревки и оканчивающихся у линей DE, DF перпендикулярныхъ къ двумъ плоскостямъ AB, AC; и назвавъ при томъ T напряженіе веревки, будемъ имѣть (699) T : P = *син.* ABC : *кос.* BAE = *син.* ADI : *син.* AEI или *син.* AED, потому что ADI = ABD, и BAE есть склоненіе конца GP къ плоскости AB. Но (*Геом.* 303) *син.* ADI : *син.* AED = AE : AD; слѣд. T : P = AE : AD.

По той же причинѣ и по причинѣ равенства напряженій обоихъ концовъ GP, GQ веревки будемъ имѣть Q : T = AD : AF; умноживъ наконецъ сіи двѣ пропорціи, выведемъ Q : P = AE : AF.

711. Ежели тѣло будетъ лежать въ одно время на многихъ плоскостяхъ, то бу-

детъ ли на него дѣйствовать одна сила, или многія, въ числѣ которыхъ разумѣется и тяжесть ихъ, общій законъ равновѣсія зависитъ отъ слѣдующаго: 1е чтобъ составная сила изъ всѣхъ могла раздѣлиться на столько новыхъ, сколько находится на плоскостяхъ точекъ прикосновенныхъ тѣлу, и чтобъ эти новыя силы проходили по онымъ точкамъ; 2е чтобъ эти же силы были перпендикулярны къ плоскости прикосновенной тѣлу въ сходственной съ ними точкѣ.

Отсюда надобно заключить, что тѣло, побуждаемое единственною своею тяжестью, будетъ находиться въ равновѣсіи между двумя наклоненными плоскостями тогда только, когда на вертикалѣ, проходящемъ чрезъ центръ тяжести его, можно взять по крайней мѣрѣ одну точку, изъ которой бы опущенные перпендикуляры на каждую плоскость имѣли вышеупомянутыя условія (689 и слѣд.); и слѣд. когда одна изъ плоскостей будетъ горизонтальна (*фиг.* 142), то тѣло не можетъ притти въ равновѣсіе (по исключеніи разумѣется тренія), кромѣ одного случая, когда вертикалъ, проведенный чрезъ центръ тяжести его, будетъ проходить по какой нибудь изъ точекъ прикосновенныхъ горизонтальной плоскости; или по крайней мѣрѣ

оно придетъ въ равновѣсіе тогда только; когда всѣ сіи точки не будутъ находиться по одну сторону вертикала, и въ такомъ случаѣ другая плоскость не будетъ имѣть ничего къ поддержанію.

712. По симъ правиламъ можно во всякомъ случаѣ опредѣлить равновѣсіе тѣлъ на плоскостяхъ. Оными же правилами изъясняется сила сводовъ и вообще то, почему пустыя тѣла, коихъ наружная поверхность бываетъ выпуклая, противятся гораздо больше гнетущей ихъ силѣ, чѣмъ тѣла ограниченныя плоскими поверхностями.

На примѣръ, ежели возьмемъ тѣло составленное изъ четырехъ частей ABCD, CDFE, FEGH, ABGH (*фиг.* 143) совершенно твердыхъ, которыхъ наружныя и внутреннія кривизны суть круговыя и концентральныя; и потомъ употребивъ по направленіямъ, стремящимся къ центру, одинакую силу, дѣйствующую на центръ тяжести каждой части, будемъ стараться разорвать ихъ между собою, то никогда до этого достигнуть не можемъ. Ибо не трудно примѣтить, что каждую изъ силъ можно раздѣлить на двѣ другія перпендикулярныя съ двумя плоскими фасами сходственной части, и слѣд. отъ одной части къ смежной другой будутъ простираться всегда двѣ силы равныя и прямо противуположныя, взаимно себя уничтожающія; слѣд. всѣ оныя силы должны здѣлать равновѣсіе.

Естьли EFGB, ABCD, HCKI (*фиг.* 144) будутъ представлять три сводные камня, или три смежныя части свода; то можно равномѣрно вообразить изъ какой нибудь точки вертикала, проведеннаго чрезъ центръ тяжести каждаго камня перпендикуляръ къ обоимъ фасамъ его. А какъ всегда найдется такая точка, откуда проведенный перпендикуляръ къ фасу будетъ прямо-противуположенъ перпендикуляру, проведенному къ томуже фасу по какой нибудь точкѣ вертикала, принадлежащаго смежному камню; и потому давши приличный вѣсъ каждому камню, можно всегда здѣлать равными двѣ силы, имѣющія направленіе по онымъ перпендикулярамъ, и слѣд. можно привести всегда сводные камни въ равновѣсіе, выключая двухъ только, у которыхъ будетъ по одному фасу горизонтальному; для этихъ послѣднихъ нельзя здѣлать означеннаго раздѣленія силамъ, и слѣд. для поддержанія ихъ нужно употребить горизонтальное сопротивленіе.

713. Посудимъ теперь о движеніи на плоскостяхъ, не допуская совсѣмъ тѣмъ тренія.

Тѣло положенное на плоскости безъ тренія, опираясь нѣкоторою частію своей поверхности объ нее, можетъ, говоря вообще, по собственной своей тяжести получить два рода движенія: одно, которое будетъ общее всѣмъ частямъ его, и по которому центръ тяжести его движется параллельно съ плоскостью, и можетъ также приближаться къ плоскости, или удаляться отъ нее; другое,

по которому всѣ части будутъ вертѣться около центра тяжести, такъ однакожъ, что тѣло не перестанетъ касаться плоскости въ какой нибудь точкѣ.

714. Дабы узнать, получитъ ли тѣло какое нибудь коловратное движеніе по силѣ своей тяжести, или нѣтъ, надобно разсмотрѣть; будетъ ли перпендикуляръ, проведенный изъ центра тяжести на плоскость, упадать въ какую нибудь точку тѣла изъ прикосновенныхъ къ плоскости, или не оставитъ всѣхъ ихъ по одну сторону. Естьли это случится, то не можетъ произойти коловратнаго движенія, потому что тяжесть, которую можно всегда полагать дѣйствующею по центру тяжести, должна раздѣлиться на двѣ силы, на одну параллельную съ плоскостью, а другую перпендикулярную къ ней. Но вторая, ежели будетъ имѣть выше упомянутыя свойства (689 и слѣд.) равновѣсія, должна необходимо уничтожиться. Что жъ касается до первой, то, поелику она проходитъ чрезъ центръ тяжести, должна раздѣлиться по всѣмъ частямъ тѣла, и слѣд. всѣ части получатъ равныя скорости и параллельныя съ плоскостью. И такъ шаръ однороднаго вещества, положенный на косую плоскость, долженъ

безъ тренія опуститься по оной скользя, а не вертясь; потому что перпендикуляръ, проведенный чрезъ центръ тяжести шара на плоскость, пересѣкаетъ всегда поверхность его въ точкѣ прикосновенія съ плоскостью.

715. Но ежели перпендикуляръ, проведенный изъ центра тяжести на плоскость, не упадетъ ни въ какую точку тѣла прикосновенную къ плоскости, или ежели оставитъ ихъ всѣ по одну сторону себя, то произойдетъ всегда коловратное движеніе; потому что сопротивленіе плоскости дѣйствуя по перпендикуляру къ точкѣ прикосновенія, (или по перпендикуляру, проходящему между точками прикосновенія, когда ихъ будетъ много), равняется силѣ низвергающей тѣло по параллельному направленію и въ противную сторону тому, по которому оно давитъ плоскость; а какъ по положенію эта сила дѣйствуетъ по линеѣ не проходящей чрезъ центръ тяжести, то неминуемо слѣдуетъ произойти (290) коловратному движенію.

О Щурупѣ или Винтѣ.

716. Шурупъ или винтъ АВ (*фиг.* 145 и 146) есть цилиндръ, покрытый снаружи обводомъ улитковой фигуры, котораго

склоненіе въ разсужденіи оси того цилиндра повсюду одинаково.

Гайка есть тѣло XZ, которое надѣвается на винтъ, и котораго во внутренности вырѣзывается жолобъ улитковой фигуры на подобіе наружнаго обвода винта, такъ что онъ служитъ совершеннымъ гнѣздомъ объемлемой имъ части винта.

717. Иногда гайка бываетъ неподвижна, и щурупъ проходитъ вертясь по переплетамъ сквозь гайку; иногда же щурупъ остается на мѣстѣ, а гайка посредствомъ коловращенія пробѣгаетъ всю длину винта. Какое бы положеніе того и другой ни было, но пока сила будетъ сообщена на одинакомъ разстояніи отъ оси винта, то всегда остается одинакое содержаніе между сею силою и усиліемъ, какое она способна здѣлать по направленію оси; это усиліе заслуживаетъ особеннаго замѣчанія въ щурупѣ.

Разстояніе или промежутки между двумя переплетами винтоваго обруча называется *высотою ступени щурупа*; такимъ образомъ DE (*фиг.* 146) будетъ изображать высоту ступени винта, или просто ступень его.

718. Дабы получить совершенное понятіе о щурупѣ, то можно представить себѣ обводъ его, которой называется *веревкою*, составленнымъ изъ гипотенузъ СК (*фиг.* 147) столькихъ прямоугольныхъ треугольниковъ СІК, сколько должно быть на винтѣ ступеней; каждый треугольникъ будетъ имѣть высотою высоту СІ ступени, а основаніемъ ІК длину окружности цилиндрическаго сѣченія, сходственнаго точкѣ І; и слѣд. чѣмъ переплеты будутъ чаще, тѣмъ ІК здѣлается длиннѣе, хотя высота СІ останется одинакою.

Въ *фигурѣ* 146, гдѣ обводы или переплеты представляютъ острые обручи, по мѣрѣ какъ эти переплеты сближаются больше, основаніе ІК (*фиг.* 147) увеличивается, а высота СІ уменьшается.

719. Здѣлавъ исключеніе тренію, допустимъ щурупъ АВ, на которой надѣта гайка XZ (*фиг.* 145) неподвижнымъ и имѣющимъ вертикальное положеніе; на гайку не дѣйствуетъ никакая особенная сила, кромѣ собственной ея тяжести. Нѣтъ нималаго сомнѣнія въ томъ, что гайка, обращаясь около внутреннихъ переплетовъ винта, пройдетъ по всѣмъ имъ, скользя на каждомъ, какъ бы на наклоненной плоскости. Не меньше сего ясно,

что употребивъ на гайку XZ силу, имѣющую разныя многія направленія, можно остановить ее. Но какъ для остановленія гайки стоитъ только воспрепятствовать ея коловращенію, то ограничивъ себя во всемъ прочемъ, постараемся сыскать содержаніе между тяжестію гайки, или вобще между силою, которая будетъ опущать ее параллельно съ осью винта, и силою, которая въ состояніи воспрепятствовать вертѣться ей. Посудимъ сначала объ одной точкѣ общей гайкѣ и переплету винта.

Должно почитать силы, дѣйствующую непосредственно на оную точку для воспрепятствованія коловращенію гайки, и ту, которая стремится опускать ее параллельно съ осью, такими, какъ бы онѣ дѣлали равновѣсіе на наклоненной плоскости, имѣющей высотою ступень винта, а основаніемъ окружность, которой радіусомъ служитъ разтояніе той же точки до оси. Это слѣдуетъ неминуемо изъ строенія сей машины. Но первая изъ этихъ силъ параллельна основанію наклоненной плоскости, а вторая перпендикулярна къ ней; слѣд. изъ сказаннаго (704) должно заключить, что часть параллельной силы съ осью винта, дѣйствующей на какую нибудь точку переплета, содержится къ силѣ, какую

нужно употребить непосредственно въ той точкѣ для воспрепятствованія коловращенію ея въ противную сторону такъ, какъ основаніе той же наклоненной плоскости къ высотѣ ея; то есть, какъ окружность, имѣющая радіусомъ разстояніе той точки до оси, содержится къ высотѣ ступени винта.

И такъ назвавъ f первую силу, t вторую, r разстояніе разсматриваемой точки до оси, h высоту ступени винта; и принявъ $1 : c$ за содержаніе радіуса къ окружности, въ какомъ случаѣ rc будетъ значить окружность, имѣющую радіусомъ r, будемъ имѣть $f : t = rc : h$.

А какъ каждая точка гайки не непосредственно поддерживается, и при томъ вся масса подчинена единственной силѣ Q, сообщенной въ какой нибудь точкѣ гайки, которой разстояніе до оси, положимъ, равно R; то чѣмъ болѣе будетъ R въ разсужденіи r, тѣмъ меньшую часть сила Q (601) должна употреблять для каждой точки; и такъ назвавъ q часть этой силы, которая на разстояніи R способна здѣлать такое же усиліе, какое t на разстояніи r, получимъ $t : q = R : r$.

Естьли умножимъ члены этой пропорцiи на сходственные предыдущей, то выведемъ $f : q = cRr : hr = cR : h$. То есть, для каждой точки гайки, общей съ переплетомъ винта, находится всегда одинакое содержанiе между силою, опускающею ее параллельно съ осью, и силою, которая на извѣстномъ разстоянiи R способна воспрепятствовать вертѣться ей; это содержанiе бываетъ равно $cR : h$, гдѣ cR есть окружность, которую описываетъ сила Q коловращаясь. И такъ заключимъ, что сумма всѣхъ силъ f, опускающихъ гайку параллельно съ осью винта, содержится къ суммѣ всѣхъ силъ q, способныхъ удержать коловращенiе ея, то есть, что цѣлая сила, (которую назовемъ F) параллельная съ осью винта, содержится къ силѣ Q, способной удержать коловращенiе гайки по дѣйствiю силы F, такъ какъ окружность описываемая силою Q къ высотѣ ступени винта.

720. Равномѣрно сила, которую нужно употребить параллельно съ осью щурупа, чтобъ воспрепятствовать силѣ Q вертѣть гайкою, должна содержаться къ сей же силѣ Q, какъ окружность, которую стремится описывать эта послѣдняя, къ высотѣ ступени винта.

721. И такъ въ одномъ и томъ же винтѣ дѣйствіе силы Q увеличивается тѣмъ больше, чѣмъ далѣе относится она отъ оси его. Чтожъ касается до силы одинаково удаленной въ разныхъ винтахъ, то дѣйствіе ея увеличивается по мѣрѣ уменьшенія высоты ступени; то есть, чѣмъ чаще будутъ зделаны переплеты, тѣмъ болѣе сила способна бывает гнести по направленію оси.

722. И такъ щурупъ, какъ не трудно примѣтить, есть сложная машина, и состоитъ изъ наклоненной плоскости и рычага. Онъ употребляется съ великою пользою для гнету тѣлъ. Треніе уменьшаетъ безъ сомнѣнія много дѣйствія сей машины въ разсужденіи выведеннаго нами содержанія; и потому не должно почитать это содержаніе, опредѣляющимъ совершенное дѣйствіе оной.

723. Въ сей машинѣ, равно какъ и въ прочихъ, какой выигрышъ получаемъ со стороны силы, такую напротивъ дѣлаемъ потерю во времени, или въ скорости. Ибо надобно силѣ зделать цѣлой кругъ, чтобъ спустить гайку на одну ступень.

724. Впрочемъ хотя эта невыгода, естьли только можно назвать ее такимъ именемъ, бываетъ всегда неизбѣжна, но во многихъ случаяхъ полезна,

На примѣръ, ежели бы нужно было вымѣрять разныя части весьма малаго пространства AB (*фиг.* 148), то это съ великимъ успѣхомъ можно здѣлать посредствомъ щурупа DE, у котораго степени весьма равны, опуститвъ въ немъ на такое пространство гайку отъ точки E. Естьли на другомъ концѣ этого винта будетъ находиться стрѣлка, которая, будучи увлекаема общимъ движенїемъ съ винтомъ, станетъ пробѣгать поперемѣнно раздѣленїя круга, то можно по числу оборотовъ здѣланныхъ стрѣлкою, опредѣлить настоящую мѣру всякой части AB, какъ бы она мала ни была.

725. Совокупленіе щурупа съ другими машинами можетъ здѣлать большую помощь симъ послѣднимъ. На примѣръ, ежели сила Q, сообщенная по рукояткѣ DEQ (*фиг.* 149), будетъ ворочать винтъ AB, котораго веревка захватывая зубцы колеса M, будетъ поворачивать его вмѣстѣ съ валомъ, и наматывать на валъ канатъ KP; то вотъ какимъ образомъ опредѣлится содержаніе силы Q къ тяжести P.

Означивъ чрезъ L усиліе винтоваго переплета на зубецъ L, получимъ Q : L = AB : *Cir*DE, гдѣ AB представляетъ высоту ступени, а *Cir*DE окружность описываемую силою Q (719). А какъ усиліе L есть ничто другое, какъ сила дѣйствующая посредствомъ окружности колеса на тяжесть, то (676) будемъ имѣть также L : P = IK : IL; слѣд.

по умноженіи обѣихъ сихъ пропорцій выходитъ Q : P = AB × IK : IL × CirDE новая, которая показываетъ, что сила Q тѣмъ болѣе имѣетъ выигрышу, чѣмъ AB и IK будутъ меньше въ разсужденіи CirDE и IL.

О Клинѣ.

726. Клинъ ADECB (*фиг.* 150) есть треугольная призма, которую забиваютъ въ здѣланную уже трещину IZR между двумя поверхностями, чтобъ увеличить ее, или раздѣлить болѣе фэсы двухъ поверхностей, или наконецъ для того, чтобъ здѣлать между ими опредѣленное отверстіе.

727. Теорія клина, принимаемаго раскалывающимъ орудіемъ, еще весьма несовершенна, и вѣроятно останется такою на долгое время. Поелику нѣтъ тѣла, которое бы не имѣло нѣкоторой гибкости, и потому части трещины, касающіяся фасовъ клина, могутъ раздвинуться болѣе, а точка Z, гдѣ кончится трещина, не получитъ никакой перемѣны; такимъ образомъ одна часть силы дѣйствующей на вершину клина ADEC, будетъ единственно склонять отдѣленныя уже стороны

трещины, или лучше сказать, гнуть ихъ; а другая раздирать связь цѣлаго мѣста.

728. Естьли бы стороны ZFG, ZKL не имѣли никакой гибкости; и естьли бы сцѣпленіе частей остальнаго цѣлаго мѣста могло рушиться въ одно время; то можно бы при дѣйствіи разщепленія разсматривать вещи такимъ образомъ. Можно бы, принявъ тѣло расколотымъ, замѣнить сопротивленія частей ZFGV и ZKLX силами, переданными перпендикулярно въ VM и XS и на равныхъ разстояніяхъ тѣмъ, гдѣ цѣлое усиліе каждаго сопротивленія дѣйствуетъ. Тогда для полученія содержанія силы P къ двумъ сопротивленіямъ M и S отдѣляемыхъ частей, стали бы мы такъ разсуждать.

729. Дабы сила, ударяющая по клину перпендикулярно, могла получить совершенное дѣйствіе, то она въ противуположности должна при основаніи VX встрѣтиться съ крѣпкою подпорою; такъ что эта сила, естьли бы раскалываемое тѣло не было въ соединеніи съ другимъ, и притомъ было бы лишено тренія, должна бы пересѣчь основаніе VX перпендикулярно, предположивъ его плоскостью.

Естьлижъ допустимъ треніе, то эта сила не всегда можетъ быть перпендикулярна къ основанію; однако она при пересѣченіи своемъ не должна дѣлать угла меньше того, которой мы, говоря о треніи, скоро опредѣлимъ.

Естьли основаніе будетъ неподвижно держаться на одной точкѣ, то направленіе перпендикулярной силы, дѣйствующей на клинъ, должно проходить по той точкѣ. По предположеніи сихъ условій, вотъ какъ совершается дѣйствіе силы P.

736. Дабы сила P могла раздѣлиться на обѣ стороны ZFG, ZKL, то надобно въ такомъ случаѣ, когда не будетъ допускаемо треніе; на направленіи ея быть по крайней мѣрѣ одной точкѣ O, откуда бы можно было опустить по перпендикуляру на каждой фасъ трещины, по перпендикуляру проходящему по какой нибудь изъ прикосновенныхъ точекъ фаса съ клиномъ. Когдажъ допущено будетъ треніе, то это условіе не нужно, а довольно и того ежели на направленіи силы P будетъ находиться такая точка O откуда можно провести двѣ линеи OR, IO проходящія чрезъ точки прикосновенія, и не дѣлающія тамъ съ фасами угла меньше угла тренія. На сихъ-то условіяхъ сила P можетъ совершенно сообщаться обоимъ фасамъ.

731. И такъ нетрудно примѣтить изъ сказаннаго, что познаніе силъ, какія нужно употребить на раздѣленіе частей какого нибудь тѣла посредствомъ клина, весьма темно въ своей теоріи. И мы будучи столько ограничены въ сей теоріи, постараемся по крайней мѣрѣ опредѣлить содержаніе силы P къ каждому сопротивленію изъ двухъ M и S, здѣлавъ исключеніе тренію и допустивъ, что основаніе VX опирается на плоскость.

732. Вообразимъ силу P, которую означаетъ OQ раздѣленною на двѣ другія, имѣющія направленіе по перпендикулярамъ ON, OM къ двумъ сторонамъ клина. Эти двѣ силы будутъ стремиться вертѣть обѣ части тѣла; первая около V, а вторая около X. Сопротивленія же M и S съ обѣихъ противоположныхъ сторонъ будутъ силы, противныя сему коловратному движенію. Проведемъ перпендикуляры VY, XT на ON и OM, и допустимъ MVY и SXT двумя угловатыми рычагами, коихъ подставки находятся въ V и X.

По предположеніи сего и назвавъ I силу по направленію ON, получимъ $P : I = OQ : ON$; а какъ мы допустили силу P перпен-

дикулярною къ хвосту клина, а обѣ силы ON, OM перпендикулярными къ его фасамъ, то треугольники ONQ, ABC выходятъ подобны, и по этой причинѣ будемъ имѣть OQ : ON = AC : AB; слѣд. P : I = AC : AB. Естьли означимъ чрезъ M сопротивленіе части ZFMV, которое, положимъ, проходитъ на разстояніи VM; то по свойству рычага получимъ I : M = VM : VY. Умноживъ сіи двѣ пропорціи, выведемъ P : M = AC × VM : AB × VY. А для другаго фаса найдемъ также P : S = AC × XS : BC × XT.

733. Естьли тѣло будетъ удерживаемо, то надобно наблюдать нѣкоторое различіе въ изъясненныхъ вещахъ; однако со всѣмъ этимъ вниманіемъ мы не болѣе получимъ свѣдѣнія въ истинной теоріи клина, опирающейся болѣе на физическихъ познаніяхъ, и потому мы прекращаемъ рѣчь о сей матеріи. Мы дадимъ только на замѣчаніе, что судя по пропорціи P : M = AC × VM : AB × VY должно заключить, что вообще дѣйствіе клина увеличивается тѣмъ болѣе, чѣмъ онъ будетъ острѣе и площе, потому что AC становится въ такомъ случаѣ гораздо меньше относительно къ AB. Къ сему роду орудія должно относить ножи, бритвы и всѣ прочія рѣжущія или разсѣкающія орудія.

О Треніи.

734. Поверхность тѣлъ, самыхъ даже полированныхъ, имѣетъ шароховатость; то есть, усѣяна возвышеніями и впадинами, или что иначе называется *порами*. Когда тѣло положишь на другое, то возвышенныя части одного входятъ въ поры или во впадины другаго, такъ что не употребивъ извѣстной силы, не можно ихъ между собою разлучить.

735. Сопротивленіе, происходящее отъ этого свойства тѣлъ, называется силою *тренія*. Два рода тренія примѣчаемъ: первое бываетъ тогда, когда одна поверхность скользитъ по другой, а второе, когда одна изъ поверхностей или обѣ вмѣстѣ должны коловращаясь двигаться; такое треніе замѣчательно въ катящихся по землѣ колесахъ. Сопротивленіе, происходящее отъ втораго рода тренія, бываетъ гораздо меньше перваго, потому что коловратное движеніе равняетъ шароховатость.

736. Естьли бы возвышенія, покрывающія поверхность, были совершенно тверды и не отдѣлимы отъ нея, то для одолѣнія или уничтоженія тренія, надобно бы при всякомъ разѣ поднимать скользящуюся массу.

И напротивъ, ежели бы онѣ имѣли совершенную гибкость, то не было бы никакого сопротивленія, и слѣд. никакого тренія. А какъ эти возвышенія лишены какъ совершенной твердости, такъ и совершенной гибкости, то слѣдуетъ заключить 1е. что сопротивленіе тренія происходитъ частію отъ трудности въ склоненіи шароховатости, и частію отъ необходимости въ нѣкоторомъ поднятіи тѣла. 2е. Что поелику шароховатость имѣетъ только нѣкоторую степень соединенія или цѣпкости съ поверхностью, и потому когда сила могущая заставить скользить тѣло, превзойдетъ степень сцѣпленія, то шароховатость, уступая этой силѣ, истребляется, и поверхности лишаются мало по малу своей массы. И такъ дѣйствіе тренія въ машинахъ не только поглощаетъ часть движущей силы, но и еще служитъ къ разрушенію машинъ.

737. Хотя не льзя сказать совсѣмъ невозможно, но, кажется, весьма трудно предписать общія правила довольно вѣрныя на опредѣленіе тренія. Ибо не трудно понять, что сопротивленіе тренія должно безпрестанно измѣняться, глядя по связи; плотности и свойству поверхностей; предметы сіи такъ многоразличны, какъ различны

роды вещества. Оно также перемѣняется отъ степени твердости трущихся поверхностей и отъ степени гибкости возвышенныхъ частей ихъ; равнымъ образомъ измѣняется отъ фигуры и расположенія шароховатости, то есть, свободно ли она, или не такъ свободно проницаетъ въ поры; отъ степени тнѣтнія на поверхности и отъ продолженія онаго; ибо какъ всякая матерія имѣетъ нѣкоторую гибкость, то возвышенныя части поверхностей, входя въ поры и углубляясь въ оныхъ дольше, расширяютъ ихъ болѣе.

738. Опытъ одинъ способенъ извѣдать всѣ эти случайности и научить насъ, какое каждая изъ означенныхъ причинъ производитъ сопротивленіе тренія. Хотя же свѣдѣнія, пріобрѣтенныя опытомъ, не такъ совершенны и немногочисленны, однако могутъ быть полезны во многихъ случаяхъ. И такъ предложимъ ихъ равно какъ и средства употреблять ихъ въ выкладкѣ относительно къ разнымъ родамъ машинъ и движеній.

739. 1е. Когда трущіяся поверхности бываютъ одной матеріи, тогда сопротивленіе, при всѣхъ впрочемъ равныхъ частяхъ, выходитъ больше, чѣмъ въ поверхностяхъ

разной матеріи. Почему двѣ поверхности разнаго дерева будутъ скользить одна на другой удобнѣе, чѣмъ одного рода; желѣзо будетъ меньше тереться о мѣдь, чѣмъ желѣзо обь желѣзо, или мѣдь объ мѣдь.

2е. Чѣмъ шароховатѣе будутъ поверхности, и не такъ обдѣланы и выглажены, тѣмъ сопротивленія произойдетъ больше при треніи. Почему можно уменьшить это сопротивленіе полировкою поверхностей, или когда ихъ смажешь какою нибудь матеріею: на примѣръ, масломъ, мыломъ, саломъ и проч. словомъ, всякою такою матеріею, которая закрывая поры, лишаетъ поверхности ихъ цѣпкости.

3. Хотя пространство поверхностей, кажется, долженствовало бы дѣлать чувствительную перемѣну въ треніи; однако по многимъ опытамъ извѣдано, что оно производитъ весьма малую. Такимъ образомъ когда станемъ тащить тѣло тою или другою стороною его, то хотя эти стороны будутъ величиною и различны, однако мы найдемъ для себя трудность въ обоихъ мѣстахъ одинакую, лишь бы полировка ихъ была одинакова. Изключается одинъ только случай: когда тѣло прилегаетъ къ поверхности острымъ концемъ,

тогда треніе весьма увеличивается, ибо возвышенныя части его болѣе углубляются, чѣмъ бы оно прилегало къ оной многими точками; между послѣдними находятся такія, которыя препятствуютъ углубленію.

4е. Сопротивленіе тренія паче всего зависитъ отъ гнѣтенія, такъ что, кажется, оно увеличивается пропорціонально съ вѣсомъ или тяжестію. То есть, мы находимъ вдвое трудности къ преодолѣнію тренія въ тѣлѣ двойнаго вѣса, или когда гнѣтущая сила одну поверхность на другой будетъ вдвое больше.

5е. Однако и время, въ продолженіи котораго бываютъ поверхности подъ гнетомъ, производитъ перемѣну въ треніи; совсѣмъ тѣмъ опытъ не опредѣлилъ еще, какъ далеко увеличивается сопротивленіе относительно ко времени, хотя безъ сомнѣнія границы оному должны быть, и границы сіи должны также подлежать перемѣнамъ по свойству трущихся поверхностей.

6е. Что принадлежитъ до поверхностей одинакой матеріи, трущихся между собою, то пока онѣ будутъ обдѣланы одинаково, то есть, пока ихъ гладкость будетъ

равна, тренiе остается безъ чувствительной перемѣны; это тренiе отчасти опредѣлено, и именно для нѣкоторыхъ матерiй оно состоитъ изъ третей доли тяжести давленiя, а для другихъ изъ четвертой и проч.

740. Причиною, почему тренiе не зависитъ отъ величины поверхностей, обыкновенно полагаютъ то, что чѣмъ точекъ трущей поверхности будетъ больше, тѣмъ гнетущая сила каждую становится меньше, и на оборотъ. Почему возвышенiя должны входить менѣе или болѣе во впадины глядя по пространству поверхностей, и слѣд. чѣмъ болѣе надобно освобождать возвышенiй, тѣмъ на меньшее количество; слѣд. усилiе въ обоихъ случаяхъ употребляется одинакое.

Но по этому заключенiю надобно допустить, что освобожденiе частей бываетъ пропорцiонально (въ равномъ числѣ ихъ) количеству, на которое онѣ входятъ въ поры. Однакожъ это допущенiе не можетъ быть принято, пока количество, на которое онѣ входятъ, будетъ весьма мало даже относительно къ глубинѣ впадинъ. По этому не должно ли заключить, что опытъ дѣлаетъ тренiе совершенно пропорцiональнымъ единому гнетенiю; тренiе остроконечныхъ тѣлъ от-

сюда исключается, а это подтверждаетъ здѣланное нами замѣчаніе. Покатость корабельнаго спуска дѣлаетъ также примѣчательное исключеніе, потому что она не болѣе бываетъ иногда 6 дюймовъ на футъ; но это число гораздо меньше того, которое опытомъ дознано для многихъ матерій, для которыхъ эта покатость полагается отъ 15 до 18 степеней. И такъ подобно думать, что въ этомъ случаѣ поверхности не малое имѣютъ вліяніе на треніе.

741. Здѣлавъ замѣчаніе на все, что дознано опытомъ въ разсужденіи тренія, посмотримъ, какимъ образомъ опредѣливъ количество тренія для какой нибудь извѣстной матеріи, можемъ узнать его въ машинѣ или въ данномъ движеніи. Мы будемъ принимать треніе единственно пропорціональнымъ гнетенію.

742. Возьмемъ сначала въ примѣръ тяжесть P (*фиг* 151), положенную на горизонтальную плоскость AB, и которую тащитъ другая тяжесть Q параллельно съ AB. Допустимъ тѣло Q способнымъ по вѣсу своему заставить тѣло P только скользить по поверхности AB. Посмотримъ теперь, какое

же содержаніе должно быть между вѣсомъ Q и треніемъ.

Проведемъ изъ центра тяжести G тѣла P перпендикуляръ GH на плоскость AB. Тяжесть тѣла P будетъ побуждать его къ движенію по GH, а вѣсъ Q по направленію KD, которое пересѣкается съ GH въ точкѣ K. Изъ стеченія этихъ двухъ силъ выходитъ новая по какой нибудь линеи KI, пересѣкающей въ I горизонтальную плоскость; но это усиліе должно уничтожиться, потому что мы предполагаемъ тѣло P единственно на походѣ. Допустимъ усиліе по KI или KIZ сообщеннымъ въ точкѣ I и раздѣленнымъ на два, на одно перпендикулярное къ плоскости, а другое по направленію ея; послѣ чего не трудно примѣтить, что эти усилія будутъ совершенно равны имѣющимъ направленія по KH и KD. Сверхъ того первое должно неминуемо уничтожиться, только бы оно повстрѣчалось съ плоскостью AB въ какой нибудь точкѣ I общей съ поверхностью тѣла. Чтожъ принадлежитъ до втораго, то оно, имѣя одинакое направленіе съ треніемъ, не уничтожится прежде, пока не будетъ равно силѣ его; и такъ надобно Q совершенно равняться силѣ тренія.

743. Отсюда явствуетъ, какъ должно поступать при опредѣленіи величины тренія; надобно брать вмѣсто Q попеременно тяжести разныхъ вѣсовъ, пока найдешь такую, которая приведетъ тѣло P въ состояніе готовымъ двигаться.

А дабы не включить въ исчисленіи тренія тѣла P ничего посторонняго, то надобно наблюдать, 1е. чтобъ блокъ D былъ весьма подвиженъ, и веревка KDQ имѣла возможную гибкость. 2е. Привязывать веревку CD въ точкѣ C какъ можно ближе къ поверхности AB; это вниманіе нужно имѣть потому, что при всѣхъ впрочемъ равныхъ вещахъ, точка I, гдѣ усиліе по KI встрѣчается съ поверхностью AB, тѣмъ болѣе приближится къ концу S основанія тѣла, и даже можетъ упасть внѣ этого основанія, чѣмъ точка C будетъ выше лежать отъ плоскости. Но поелику при паденіи точки I внѣ основанія, перпендикулярное усиліе къ плоскости не можетъ совсѣмъ уничтожиться, и потому должно произойти (714) коловратное движеніе въ тѣлѣ; слѣд. опредѣляемое тогда треніе будетъ весьма несходно съ сысканнымъ теперь, то есть, съ тѣмъ, которое препятствуетъ скользкому движенію, ибо тѣло начавъ коловращаться по острой точкѣ, долж-

но весьма много увеличить треніе. Естьли же возьмешь точку C весьма близко къ плоскости AB, то и точка I по мѣрѣ того приближится къ точкѣ H; и слѣд. не имѣемъ послѣ причины думать, чтобъ все гнѣтеніе тяжести совокупилось въ одну точку S.

744. Разсмотримъ теперь тѣло, когда оно будетъ положено на наклоненную плоскость и удерживаемо единымъ дѣйствіемъ тренія. Сила тяжести, имѣющая направленіе по вертикалу GZ (*фиг.* 152), проходящему чрезъ центръ тяжести G тѣла P, встрѣчаясь въ какой нибудь точкѣ I съ поверхностью AB, должна раздѣлиться на два усилія, на одно перпендикулярное къ плоскости, а другое по направленію ея. Первое уничтожится, естьли, точка I не будетъ упадать внѣ основанія RS; а чтобъ второе могло уничтожиться, то должно ему равняться силѣ тренія. Но здѣлавъ параллелограммъ ILZH, и означивъ въ немъ діагональю IZ тяжесть тѣла, не трудно примѣтить, что IH изобразитъ въ такомъ случаѣ гнетеніе, а IL силу тренія; а какъ въ подобныхъ треугольникахъ ILZ, ABC получаемъ IL : LZ или IH = BC : AC, то заключаемъ, что сила тренія должна содержаться къ давленію, какъ высота плоскости къ основанію ея.

Явствуетъ также, что IL : IZ = BC : AB, то есть, что сила тренія содержится къ тяжести тѣла, или вообще къ силѣ побуждающей его къ вертикальному движенію, какъ высота плоскости къ длинѣ ея.

745. По этимъ правиламъ можно также опредѣлить треніе на разныхъ плоскостяхъ, поднимая поперемѣнно плоскость AB до тѣхъ поръ, пока тѣло P готово будетъ къ походу; тогда вымѣрявъ высоту и основаніе, не трудно найти содержаніе силы тренія къ давленію. Надобно однакожъ стараться, чтобъ не употреблять вмѣсто P такихъ тѣлъ, у которыхъ центръ тяжести будетъ далеко отходить отъ плоскости, дабы точка I, въ которой вертикалъ GZ пересѣкается съ плоскостью, не могъ выпти изъ основанія RS или проходить по самой точкѣ R; ибо въ противномъ случаѣ получимъ треніе такого тѣла, которое прилегаетъ къ плоскости остріемъ, и слѣд. это треніе будетъ гораздо больше искомаго,

746. Отсюда и изъ замѣченнаго (714), не трудно понять причину, для чего многіе Авторы утверждаютъ, что тѣло положено будучи на наклоненной плоскости, должно опрокинуться, когда вертикалъ, проведен-

ный чрезъ центръ тяжести его, не будетъ пересѣкать основанія, которымъ оно опирается о поверхность; эту причину должно относить къ тренію, ибо когда исключишь его, то условія для того, чтобъ тѣло могло опрокинуться, должны быть совсѣмъ другія.

747. Изъ сихъ двухъ примѣровъ, не трудно примѣтить, что принявъ въ разсужденіе треніе, для приведенія тѣла на данной плоскости въ такое равновѣсіе, чтобъ оно въ готовности находилось къ движенію, надобно допустить единственную силу или составную изъ многихъ, дѣйствующихъ на него, дѣлающею съ поверхностью, на которой оно должно катиться, такое склоненіе GIS или ZIL (*фиг.* 152), чтобъ выходила всегда пропорція IL : LZ, какъ сила тренія содержится къ давленію. Но (*Геом.* 300) IL : LZ = 1 : *танг.* LIZ, здѣлавъ радіусъ табличный равнымъ 1; слѣд. склоненіе LIZ должно быть таково, при которомъ радіусу надобно содержаться къ тангенсу этого склоненія такъ, какъ сила тренія содержится къ давленію; И такъ единожды опредѣливъ содержаніе силы тренія къ давленію, не трудно будетъ послѣ опредѣлить

на всякой разъ склоненіе составной силы изъ многихъ, дѣйствующихъ на тѣло, склоненіе приводящее его при равновѣсіи въ ближайшее состояніе къ движенію. Впередъ мы будемъ называть уголъ LIZ *угломъ тренія*. Этотъ уголъ бываетъ различенъ глядя по различію матеріи, по обдѣлкѣ и гладкости ихъ и проч. Естьли треніе состоитъ изъ трети давленія, какъ то замѣчено почти во многихъ матеріяхъ довольно выровненныхъ, то тангенсъ угла LIZ будетъ также втрое больше радіуса; но уголъ такого тангенса есть 71° 34′; и слѣд. 71° 34′ служитъ угломъ тренія для такого рода матерій.

748. По симъ наблюденіямъ можно теперь опредѣлить для каждой машины содержаніе между силою и тяжестью, нужное для приведенія ее въ движеніе при допущеніи тренія.

749. Возьмемъ въ примѣръ рычагъ, и положимъ, что его подставка состоитъ изъ простой подпорки, какая явствуетъ на *фигурѣ* 153. Мы видѣли, что въ подобномъ случаѣ равновѣсіе произходитъ, когда составная сила DC изъ двухъ P и Q принимаетъ перпендикулярное положеніе въ точкѣ C въ разсужденіи общаго тангенса, проведен-

наго между рычагомъ и подставкою. Но при треніи выходитъ иное; надобно еще составной силѣ имѣть направленіе отъ D къ подставкѣ C; равновѣсіе можетъ состояться, когда склоненіе DCA будетъ больше угла тренія, которой должно опредѣлить на опытѣ. Чтожъ принадлежитъ до равновѣсія, приводящаго тѣло въ ближайшее состояніе къ движенію со стороны силы Q, то довольно для сего, когда склоненіе DCA будетъ въ точности равно углу тренія; потому что естьли раздѣлимъ силу по направленію DC на двѣ другія, на одну перпендикулярную къ AB и другую по направленію CA, то сила по CA выдетъ меньше тренія для перваго случая, и будетъ въ точности ему равна во второмъ. Что касается до силъ P и Q, то онѣ останутся всегда въ обратномъ содержаніи съ двумя перпендикулярами CK и CL, ибо составная изъ нихъ будетъ всегда проходить чрезъ точку C.

750. При случаѣ сего посмотримъ мимоходомъ на объясненіе нѣкоторыхъ Авторовъ опыта, представленнаго здѣсь (*фиг.* 154); вотъ въ чемъ дѣло состоитъ.

DFKM есть повѣшенное ведро на краю H стола LH помощію двухъ рычаговъ BC, AB, составляющихъ прямой уголъ въ B, и изъ которыхъ первой опирается

о дно ведра, а на другомъ держится душка. Ежели системѣ посредствомъ рычага AB дано будетъ на краю H стола такое расположенiе, что центръ тяжести G ведра придется на одномъ вертикалѣ съ точкою H, то ведро отнюдь не упадетъ. Причиною сему полагаютъ то, что вѣсъ всего ведра собирается въ точкѣ H, какъ бы въ точкѣ подставки; а какъ точка H остается неподвижною, и потому ведро не можетъ получить движенiя.

Вѣсъ всего ведра безъ сумнѣнiя можно допустить соединеннымъ въ H. Но можно также всегда вообразить его раздѣленнымъ на двѣ силы RH и AH, одну перпендикулярную къ AB, а другую по направленiю рычага; въ такомъ случаѣ сила HR должна неминуемо уничтожиться, но сила AH не можетъ безъ достаточнаго тренiя; слѣд. этотъ опытъ зависитъ отъ тренiя и не есть необходимое послѣдствiе того, что вертикалъ GC проходитъ по точкѣ H; ибо его можно здѣлать и нѣтъ, глядя по содержанiю тяжести ведра къ силѣ тренiя.

Впрочемъ мы занялись этимъ опытомъ, которой ни къ чему не служитъ кромѣ удовлетворенiя любопытства, единственно потому, что онъ увѣряетъ насъ на самомъ простомъ примѣрѣ о различiи условiй равновѣсiя при тренiи и безъ тренiя.

751. Но ежели подпорная точка будетъ такова, что рычагъ не можетъ принять другаго движенiя кромѣ коловратнаго; то есть, ежели рычагъ будетъ держаться на оси, шпилѣ и тому подобномъ, то должно поступать слѣдующимъ образомъ,

которой вообще принадлежитѣ этого рода рычагу, блоку и вороту, пока по крайней мѣрѣ вѣ этомѣ послѣднемѣ сила и тяжесть будутѣ дѣйствовать вѣ одной плоскости; мы намѣрены здѣлать настоящее примѣненіе кѣ вороту, а потомѣ покажемѣ, какѣ оное относить кѣ рычагу и блоку.

752. И такѣ положимѣ, что HFI (*фиг.* 155) означаетѣ плоскость колеса, GKL сѣченіе вала, DNM сѣченіе оси, около которой обращается вся машина. Безѣ тренія надлежало бы составной силѣ изѣ двухѣ P и Q, проходящей по точкѣ стеченія A сихѣ послѣднихѣ, проходить также чрезѣ центрѣ C оси. Но при треніи машина можетѣ удерживать равновѣсіе, пока направленіе составной силы, которую означаетѣ AD, не здѣлаетѣ сѣ поверхностью NDM, то есть, сѣ тангенсомѣ вѣ точкѣ пересѣченія AD сѣ поверхностью, уголѣ меньше угла тренія. А чтобѣ вѣ этомѣ увѣриться, то стоитѣ только раздѣлить эту силу на двѣ, на одну перпендикулярную кѣ тангенсу вѣ точкѣ D, а другую по направленію самаго тангенса.

По предположеніи сего и по допущеніи AD направленіемѣ составной силы, получимѣ (201) Q : P = *син.* GAD : *син.* DAF, или

по проведенiи AC, $=$ *син.* (GAC $+$ CAD): *син.* (CAF $-$ CAD). Но 1е. естьли проведемъ CE перпендикулярно на AD, то въ прямоугольномъ треугольникѣ CED уголъ CDE будетъ служить дополненiемъ къ 90° углу, которой въ точкѣ D составляетъ AD съ поверхностью NDM; слѣд. можно его почитать извѣстнымъ. И такъ назвавъ *f* уголъ тренiя, получимъ въ углѣ CDE дополненiе *f*. Естьли означимъ чрезъ r' полупоперешникъ CD оси, то по предположенiи табличнаго радiуса равнымъ 1, CE будетъ $= r'$ *кос. f*. 2е А поелику направленiя P и Q предполагаемъ извѣстными, равно какъ измѣренiя машины, то должно почитать также извѣстными углы GAC, CAF и разстоянiе AC. Почему въ прямоугольномъ треугольникѣ CAE по извѣстнымъ AC и CE $= r'$ *кос. f*, не трудно выложить уголъ CAE, которой означаю чрезъ *e*, а чрезъ *a* и *b* углы GAC, CAF; послѣ чего получаемъ Q : P $=$ *син.* $(a + e)$: *син.* $(b - e)$, и слѣд. $Q = \frac{P\,\text{син.}\,(a + e)}{\text{син.}\,(b - e)}$; вотъ величина силы при тренiи.

753. Что касается до угловъ *a*, *b* и *e*, то вотъ какъ они опредѣлятся.

Представимъ чрезъ r радіусъ CG вала, чрезъ R радіусъ CF колеса, чрезъ r' радіусъ CM оси, и наконецъ чрезъ A уголъ, заключающійся между направленіемъ AQ силы и направленіемъ AP тяжести.

Послѣ чего принявъ AC за радіусъ, получимъ въ CG, CF и CE синусы угловъ CAG, CAF и CAD; слѣд. $r : R =$ *син.* a : *син.* b или $=$ *син.* a : *син.* $(A - a)$, и CE или r' *кос.* f : CG или $r =$ *син.* e : *син.* a; слѣд. *син.* $e = \frac{r'}{r}$ *син.* a *кос.* f; а r *син.* $(A - a)$ $=$ R *син.* a. Но какъ скоро извѣстно здѣлается a, то e выведено будетъ по уравненію $e = \frac{r'}{r}$ *син.* a *кос.* f, а b по уравненію $b = A - a$.

Но для угла a уравненіе r *син.* $(A - a)$ $=$ R *син.* a превращается (*Геом.* 286) въ другое такое r *син.* A *кос.* a — r *син.* a *кос.* A $=$ R *син.* a, изъ котораго выходитъ $\frac{\text{син. } a}{\text{кос. } a}$ или *танг.* $a = \frac{r \text{ син. } A}{R + r \text{ кос. } A}$.

754. А чтобъ показать это на самомъ примѣрѣ, то положимъ уголъ A 50 градусовъ, радїусы колеса 6 футовъ, цилиндра или вала въ $\frac{1}{2}$ фута, а оси въ 1 дюймъ или $\frac{1}{12}$ фута; положимъ также, что тренїе состоитъ изъ трети гнетенїя, то есть, что (747) табличный радїусъ содержится къ тангенсу угла f тренїя $= 1:3$; въ сходственность чего найдемъ уголъ f $71^{\circ}\ 34'$, а косинусъ его равнымъ 0,3162.

И такъ будемъ имѣть $кос. f = 0{,}3162$, $R = 6$, $r = \frac{1}{2}$, $r' = \frac{1}{12}$, и слѣд. $r'\ кос.\ f = 0{,}02635$. По предположенїи сего $танг.\ a = \frac{r\ син.\ A}{R + r\ кос.\ A} = \ldots$ $\frac{\frac{1}{2}\ син.\ 50^{\circ}}{6 + \frac{1}{2} кос.\ 50^{\circ}} = \frac{\frac{1}{2} \times 0{,}76604}{6 + \frac{1}{2} \times 0{,}64279} = \frac{0{,}38302}{6{,}32139} =$ 0,06059, которой отвѣчаетъ въ таблицахъ $3^{\circ}\ 28'$; слѣд. $a = 3^{\circ}\ 28'$, а $b = 46^{\circ}\ 32'$.

Что принадлежитъ до e, то по причинѣ выведеннаго уравненїя $син.\ e = \frac{r'}{r}\ син.\ a\ кос.\ f$, получимъ $син.\ e = \frac{син.\ a}{r} \times 0{,}02635 = \frac{0{,}06047}{\frac{1}{2}} \times \ldots$ $0{,}02635 = 0{,}003187$, которой отвѣчаетъ $11'$; слѣд. $e = 0^{\circ}\ 11'$.

Слѣд. наконецъ $Q = P \times \frac{син.\ 3^{\circ}\ 39'}{син.\ 46^{\circ}\ 21'}$; и положивъ P въ 1200 фунтовъ, найдемъ $Q = 105{,}6$ фунт. Но безъ тренїя намъ бы надобно вывести $Q:P = \frac{1}{2}:6 = 1:12$, и получить $Q = 100$. Слѣд. по настоящей выкладкѣ тренїе не больше 5,6 фунт. требуетъ прибавленїя къ силѣ.

755. Опредѣляя силу способную преодолѣть треніе, мы предположили, что цѣлое давленіе выходитъ одинаково, будутъ ли сила и тяжесть находиться въ одной плоскости или въ разныхъ. Въ этомъ нѣтъ сомнѣнія; но чтобъ увѣриться больше, то

Положимъ на время, что направленіе тяжести P, держащейся на поверхности вала (*фиг.* 156), будетъ имѣть вмѣсто вертикальнаго положенія косое; хотя мало нужды до того, какое именно, но для легкости допустимъ его одинакимъ съ IA, то есть, въ вертикальной плоскости, проходящей по IP и касающейся поверхности вала.

Вообразимъ силу P перенесенною въ A, въ точку пересѣченія IA съ плоскостью колеса, и раздѣлимъ ее на двѣ другія, на одну AB вертикальную и находящуюся въ одной плоскости съ колесомъ, и на другую AD перпендикулярную къ плоскости колеса, которая по причинѣ параллельности своей съ осью вала не будетъ ничего способствовать къ обремененію стоекъ. Что принадлежитъ до силы AB, то продолженное ея направленіе должно повстрѣчаться въ какой нибудь точкѣ F съ направленіемъ силы; при стеченіи сихъ двухъ

силѣ родится новая FO, которая по допущеніи равновѣсія уничтожившись, изобразитъ обремененіе стоекъ со стороны вала посредствомъ силы Q и тяжести P, предполагаемыхъ имѣющими направленіе по AE.

Вообразимъ, что точка A начинаетъ удаляться отъ оси, поднимаясь въ той же плоскости IAR. По такому предположенію линея IA часъ отъ часу будетъ приближаться къ вертикальности, а линея AB станетъ по мѣрѣ того сравниваться съ AE; такъ что по допущеніи точки A удаленною въ безконечность, направленіе линеи IA ничѣмъ не будетъ разниться отъ направленія PS, и AB здѣлается совершенно равною AE; и такъ въ самомъ дѣлѣ сила, обременяющая осью стойки, остается одинакова, будетъ ли тяжесть дѣйствовать въ I или по линеи AM, то есть, въ одной плоскости съ колесомъ.

756. Однако не надобно изъ этого заключать, чтобъ для опредѣленія частнаго обремененія каждой стойки, довольно было раздѣлить силу FO на двѣ другія параллельныя съ нею, и изъ которыхъ бы каждая проходила по принадлежащей себѣ стойкѣ. Хотя сила AD ничего не прибавляетъ къ

обремененію подпорѣ, однакожѣ переноситѣ вѣ разныя мѣста дѣйствіе совершенной силы FO; и хотя при параллельности сила AD дѣлается безконечно малою, но за то удаляясь такжевѣ безконечность, выноситѣ дѣйствіе совершенной силы какѣ изѣ плоскости колеса, такѣ и изѣ той, вѣ которой дѣйствуетѣ тяжесть. На примѣрѣ естьли при точкѣ A (*фиг.* 157); подчиненной силѣ AC, случится сила AB перпендикулярная сѣ первою, но безконечно малая; то хотя совершенная сила AE составная изѣ нихѣ будетѣ разниться отѣ AC на безконечно малое количество, однакожѣ точка F, гдѣ эта сила пересѣчетѣ линею HR, можетѣ удалиться на конечное количество отѣ пересѣченія C той же линеи сѣ направленіемѣ первой силы; и слѣд. хотя новая сила по направленію AF будетѣ параллельна и равна силѣ AC, но удалится отѣ нее на конечное количество FD.

757. Раздѣленіе обремененія на каждую подпору можетѣ сопровождать насѣ кѣ изслѣдованію степени силы шиповѣ и пространства основанія стоекѣ, на которыхѣ лежитѣ валѣ; то есть, какой силы должны быть шипы и какого измѣренія должны быть стойки, чтобѣ могли удержать вѣ цѣлости машину,

Способъ самой простой къ опредѣленію того и другаго требуетъ раздѣленія силы на двѣ другія параллельныя съ нею, и изъ которыхъ бы каждая находилась въ плоскости параллельной съ колесомъ и проходила по каждой подставкѣ.

Равнымъ образомъ должно́ раздѣлить тяжесть на двѣ силы параллельныя съ нею, находящіяся въ тѣхъ же плоскостяхъ и проходящія по подпорнымъ точкамъ; каждое изъ сихъ раздѣленій опредѣлитъ самою простою выкладкою каждую изъ двухъ силъ, входящихъ въ сложность, изъ которыхъ должно выттти совершенное гнетеніе на каждую подпорную точку; ибо стоитъ только здѣлать (205) слѣдующія двѣ посылки: какъ сила содержится къ обремененію какой нибудь стойки, такъ разстояніе между обѣими стойками къ разстоянію плоскости колеса отъ другой; и тяжесть содержится къ обремененію на какую нибудь изъ стоекъ, какъ разстояніе между обѣими ими къ разстоянію плоскости въ которой дѣйствуетъ тяжесть, отъ другой стойки не той, которой обремененіе служитъ предметомъ сей пропорціи.

Такимъ оброзомъ определятся для каждой стойки двѣ простыя силы, выходящія изъ обремененія ея; а какъ уголъ этихъ силъ долженъ неминуемо быть такой же, какой дѣлаетъ сила съ тяжестью, предполагаемою въ плоскости колеса, то нетрудно послѣ опредѣлить цѣлое давленіе или обремененіе на каждую подпорную точку и направленіе его. Вотъ и примѣръ.

758. Поелику одно и тоже надобно дѣлать, будетъ ли допускаемо треніе или нѣтъ, лишь бы вычислена была предварительно сила, долженствующая состояться въ первомъ случаѣ; то примемъ въ разсужденіе всѣ тѣже измѣренія ворота, какія означены въ предыдущемъ примѣрѣ. Положимъ, что по допущеніи P въ 1200 фунт., найдено Q, какъ и въ самомъ дѣлѣ уже мы нашли, равнымъ 105,6 фунт. Положимъ еще, что разстояніе между стойками имѣетъ 8 футовъ, что плоскость колеса удалена отъ правой стойки (*фиг.* 120) на 1 футъ, и слѣд. на 7 футовъ отъ лѣвой; что тяжесть отходитъ въ настоящемъ случаѣ на одинъ футъ въ лѣво отъ колеса, и слѣд. на два фута отъ правой стойки, а на 6 отъ лѣвой.

И такъ получимъ двѣ простыя силы, обременяющія правую стойку, такъ - - - -

$8 : 7 = 105,6 : x = 92,4$ фунт.
$8 : 6 = 1200 : y = 900$ фунт.

А двѣ простыя силы для стойки съ лѣвой стороны по слѣдующимъ пропорціямъ - - - -

$8 : 1 = 105,6 : x' = 13,2$ фунт.
$8 : 2 = 1200 : y' = 300$ фунт.

А поелику по причинѣ дѣленія на параллельныя силы, уголъ двухъ простыхъ x и y, равно какъ и двухъ x' и y' долженъ быть одинаковъ съ угломъ, которой дѣлаетъ направленіе силы съ направленіемъ тяжести, полагаемой въ плоскости колеса; и такъ соображаясь во всемъ съ предыдущимъ примѣромъ, мы будемъ имѣть этотъ уголъ въ 50 градусовъ.

И такъ здѣлавъ (*Фиг.* 158) параллелограммъ ABDC, коего бы вертикальной бокъ AB = 900, а AC, составляя уголъ BAC въ 50 градусовъ, былъ бы = 92,4, получимъ въ діагоналѣ AD совершенное давленіе на стойку съ правой руки, а въ углѣ BAD отклоненіе его отъ вертикала.

Равномѣрно естьли здѣлано будетъ въ параллелограммѣ A'B'D'C', бокъ A'B' 300, уголъ B'A'C' 50 градусовъ, и бокъ A'C' 13,2; то діагональ A'D' означитъ обремененіе лѣвой стойки, а уголъ B'A'D' склоненіе онаго отъ вертикала.

Но познаніе сихъ четырехъ количествъ зависитъ отъ опредѣленія бока AD или A'D', и угла BAD или B'A'D' въ треугольникѣ ABD или A'B'D', въ которомъ извѣстно по два бока и заключающемуся между ими углу. Такимъ образомъ (*Геом.* 310) найдемъ AD = 962,7 фунт; BAD = $4^{\circ}13'$; A'D' = 319,0 фунт.; B'A'D' = $1^{\circ}49'$.

759. Мы нигдѣ прежде не обращали вниманія на разныя тяжести вала, оси, колеса и веревокъ. Но какъ эти тяже-

сти могутъ имѣть чувствительное содержаніе съ поднимаемымъ грузомъ P, и слѣд. могутъ также чувствительно увеличить треніе; то вотъ какъ должно относить всѣ сіи принадлежности къ предыдущему вопросу.

760. Положимъ, что общій центръ тяжести обоихъ концовъ GP и FQ (*фиг.* 159) веревки отвѣчаетъ вертикально нѣкоторой точкѣ линеи GC или продолженія ея, и удаляется отъ точки C на количество равное g, что вся тяжесть ихъ $= p$; что общій центръ тяжести частей какъ той веревки, которая привязана къ колесу, такъ и той, которая намотана на валъ, отвѣчаетъ вертикально какой нибудь точкѣ GC или продолженію ея, и удаленъ отъ C на количество $= g'$, а вся тяжесть ихъ p'; пусть поднимаемой грузъ будетъ P, и тяжесть ворота P′, то есть, колеса, вала и оси его; положимъ наконецъ, что общій центръ тяжести ихъ находится на оси, и именно въ C.

И такъ примѣчаемъ пять силъ, дѣйствующихъ на воротъ, а именно p, p', P, P′ и Q; и всѣ онѣ должны здѣлать равновѣсіе посредствомъ стоекъ и тренія.

Поелику четыре силы p, p', P и P′ параллельны между собою, то можно ихъ

привести вЬ одну R (219), которая будетЬ $= P + P' + p + p'$ и проходить на разстояніи $CR = \frac{P \times CG + pg + p'g'}{P + P' + p + p'} = \frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$, здѣлавЬ $P + P' + p + p' = P''$, и означивЬ CG чрезЬ *r*.

ДопустимЬ, что сила R пересѣкается сЬ направленіемЬ силы Q вЬ точкѣ A. Слѣд. изЬ стеченія силы R и Q надобно произойти новой, которой направленіе AM будетЬ упадать на поверхность оси вЬ такой точкѣ, гдѣ оно сдѣлаетЬ сЬ этою поверхностью уголЬ равный тренію.

Слѣд. для рѣшенія сего вопроса, вЬ которой входятЬ всѣ принадлежности машины, стоитЬ только вставить вЬ предыдущемЬ рѣшеніи (752 и 753) CR вмѣсто CG, и $P + P' + p + p'$ или P'' вмѣсто P; то есть, вставить $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$ вмѣсто *r*, а P'' вмѣсто P.

И такЬ получимЬ Q = . . . : $\frac{P'' \, син. \, (a + e)}{син. \, (b - e)}$; чтожЬ касается до *танг a*

и *син. е*, то они опредѣлятся по выведеннымъ формуламъ (753), въ которыхъ должно принимать *r* вмѣсто количества . .
$\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$, не забывая при томъ включить въ величинахъ *r* и R полупоперешникъ веревки.

761. Естьли не будетъ тренія, то уголъ *f* тренія здѣлается равенъ 90°; то есть, составная сила должна упадать перпендикулярно на поверхность оси и проходить чрезъ центръ C; слѣд. получимъ въ такомъ случаѣ *кос. f* = *o*, и *син. е* = *o*, или просто *е* = *o*; послѣ чего величина Q превратится въ $Q = \frac{P'' \text{ син. } a}{\text{син. } b}$. Но по принятіи AC за радіусъ, будемъ имѣть *син.* RAC : *син.* CAF или *син. a* : *син. b* = CR : CF = $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$: R; слѣд. $\frac{\text{син. } a}{\text{син. } b}$ = $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''R}$; слѣд. Q = . . .
$\frac{Pr + pg + p'g'}{R}$, или $QR = Pr + pg + p'g'$; то есть, моментъ Q равняется суммѣ моментовъ P и частей тяжести веревки, такъ

какъ этому и должно произойти (619) безъ тренія.

Когдажъ тяжесть веревки предположимъ равною нулю, или когда $p = o$, и $p' = o$, то выведемъ $QR = Pr$, или $Q : P = r : R$; но это въ точности сходствуетъ съ доказаннымъ (676).

762. Это рѣшеніе приличествуетъ также рычагу, которой обращается на гвоздѣ и изображенъ на *фиг.* 99; естьли за разстоянія двухъ силъ отъ оси гвоздя будутъ взяты r и R.

763. А поелику неподвижной блокъ есть тотъ же воротъ, въ которомъ радіусъ вала равняется радіусу колеса, то это же рѣшеніе приличествовать будетъ равномѣрно и неподвижному блоку, съ допущеніемъ $R = r$, а $b = a = \frac{1}{2}A$; такимъ образомъ получимъ

$$(760)\ Q = P''\frac{\text{син.}\,(a + e)}{\text{син.}\,(a - e)} = P''\frac{\text{син.}\,(\frac{1}{2}A + e)}{\text{син}\,(\frac{1}{2}A - e)},$$

и $\text{син.}\ e = \frac{r'}{r}\ \text{син.}\ \frac{1}{2}A\ \text{кос.}\ f$, памятуя, что вмѣсто r должно брать . . . . :

$$\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}.$$

764. Естьли сила Q (*фиг.* 159) будетъ вертикальна, то углы RAC, CAE, CAF можно въ такомъ случаѣ почитать безконечно малыми, и слѣд. вмѣсто *син.* $(a + e)$ и *син.* $(b - e)$ можно употреблять *син.* $a +$ *син.* e и *син.* $b -$ *син.* e; послѣ чего Q здѣлается $= P'' \frac{\text{син.}\, a + \text{син.}\, e}{\text{син.}\, b - \text{син.}\, e}$.

Но мы видѣли выше, что $\frac{\text{син.}\, a}{\text{син.}\, b} = \frac{Pr + pg + p'g'}{P''R}$, или *син* $b = \frac{P''R\, \text{син.}\, a}{Pr + pg + p'g'}$.

Слѣд. принявъ опять AC за радiусъ, будемъ имѣть *син.* a : *син.* e = CR : CE = . . . $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''} : r'\, \text{кос.}\, f$; отсюда выходитъ $e = \frac{P''r'\, \text{син.}\, a\, \text{кос.}\, f}{Pr + pg + p'g'}$; слѣд. будемъ имѣть въ такомъ случаѣ Q = ...

$$\frac{P''\left(\text{син.}\, a + \frac{P''r'\, \text{син.}\, a\, \text{кос.}\, f}{Pr + pg + p'g'}\right)}{\frac{P''R\, \text{син.}\, a - P''r'\, \text{син.}\, a\, \text{кос.}\, f}{Pr + pg + p'g'}} =$$

$$\frac{Pr + pg + p'g' + P''r'\, \text{кос.}\, f}{R - r'\, \text{кос.}\, f}.$$

765. И такѣ вѣ неподвижномѣ блокѣ (*фиг.* 160) $Q = \frac{Pr + pg + p'g' + P''r' \text{ кос. } f}{r - r' \text{ кос. } f}$.

766. Естьли означимѣ чрезѣ T напряженіе конца FP веревки, а чрезѣ p'' тяжесть его, то выдетѣ $T = P + p''$; а какѣ $P'' = P + P' + p + p'$, то вставивѣ вмѣсто P и P'' величины ихѣ вѣ T, будемѣ имѣть $Q(r - r' \text{ кос. } f) = Tr + Tr' \text{ кос. } f + pg + p'g' + (P' + p + p')r' \text{ кос. } f - (p''r + p''r' \text{ кос. } f)$, или $Q = \ldots$

$$T\left(\frac{r + r' \text{ кос. } f}{r - r' \text{ кос. } f}\right) - p''\frac{(r - r' \text{ кос. } f)}{r - r' \text{ кос. } f} + \frac{pg + p'g' + (P' + p + p')r' \text{ кос. } f}{r - r' \text{ кос. } f} = \ldots$$

$$T\left(\frac{1 + n \text{ кос. } f}{1 - n \text{ кос. } f}\right) - P''\left(\frac{1 + n \text{ кос. } f}{1 - n \text{ кос. } f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r} + (P' + p + p')n \text{ кос. } f}{1 - n \text{ кос. } f},$$ здѣлавѣ $\frac{r'}{r} = n$.

Это послѣднее выраженіе будетѣ намѣ весьма полезно при опредѣленіи дѣйствія тренія вѣ полиспастахѣ.

767. При опредѣленіи тренія въ подвижномъ блокѣ, вотъ какъ должно разсуждать о равновѣсіи.

Дабы сила Q (*фиг.* 161) могла привести въ движеніе блокъ около оси его C; то надобно ей получить прибавленіе, которое бы въ состояніи было преодолѣть треніе. Но это прибавленіе будетъ отдалять по нѣсколько обойму CP отъ прежняго ея положенія, пока грузъ P не придетъ въ такую точку; гдѣ проведенный вертикалъ чрезъ общій центръ груза, обоймы и оси здѣлаетъ съ поверхностью сей послѣдней уголъ равный тренію. Пустъ ED будетъ означать вертикалъ, а r' радіусъ оси; въ сходственность чего получимъ, какъ и прежде (752), $CE = r'$ *кос.* f.

Но этого допущенія не довольно для равновѣсія. Не трудно примѣтить, что напряженія обоихъ концовъ веревки должны здѣлать равновѣсіе въ грузѣ, въ тяжести обоймы, оси, самаго блока (безъ оси его) и наконецъ цѣлой веревки.

Положимъ, что общій центръ тяжести обоихъ концовъ QG, FT проходитъ на извѣстномъ разстояніи g отъ вертикала къ центру C, что тяжесть или вѣсъ ихъ $= p$;

что центрѣ тяжести обхватывающей блокѣ части веревки проходитѣ на разстояніи g' отѣ вертикала, проведеннаго по C, и что тяжесть этой части веревки $= p'$; означимѣ также чрезѣ P сложный вѣсѣ изѣ поднимаемаго груза, обсймы и оси; а чрезѣ P' вѣсѣ блока безѣ оси его.

И такѣ при равновѣсіи всего, надобно составной силѣ изѣ тяжестей P, P', p, p' равняться и вѣ прямой противуположности находиться сѣ напряженіями обоихѣ концовѣ.

Но не трудно примѣтить (219), что составная сила изѣ тяжестей P, P', p, p' должна равняться $P + P' + p + p''$, и проходить на разстояніи CI $= \ldots$

$$\frac{P \times CE + pg + p'g'}{P''} = \frac{Pr' \text{ кос } f + pg + p'g'}{P''},$$

P'' означаетѣ составную силу; слѣд. вертикалѣ проходящій чрезѣ I, долженѣ также проходить по точкѣ стеченія O обоихѣ концовѣ веревки. А поелику дѣло идетѣ о равновѣсіи, то надобно (201) $Q : P'' : T =$ *син.* IOT : *син.* QOT : *син.* QOI.

Представивѣ чрезѣ a уголѣ QOT, а чрезѣ e уголѣ COI, получимѣ QOI $=$ QOC $-$ COI

$= \frac{1}{2}a - e$, а ЮТ $= \frac{1}{2}a + e$; слѣд. Q : P'' : T $=$ *син.* $(\frac{1}{2}a + e)$: *син.* a : *син.* $(\frac{1}{2}a - e)$; и

слѣд. $Q = \frac{P'' \text{ син. } (\frac{1}{2}a + e)}{\text{син. } a}$, и $Q = ..$

$\frac{T \text{ син. } (\frac{1}{2}a + e)}{\text{син. } (\frac{1}{2}a - e)}$.

768. Что принадлежитъ до угла e, то не трудно его опредѣлить, замѣтивъ, что по принятіи AC за радіусъ, выходитъ CG : CI $=$ *син.* COG : *син.* COI, то есть,

$r : \frac{Pr' \text{ кос. } f + pg + p'g'}{P''} = \text{син. } \frac{1}{2}a : \text{син. } e$;

слѣд. *син.* $e = \frac{Pr' \text{ кос. } f + pg + p'g'}{P''r}$ *син.* $\frac{1}{2}a$.

769. Допустимъ теперь, что концы веревки параллельны и слѣд. вертикальны; послѣ чего углы e и a должны быть безконечно малы, и мы получимъ *син.* $a = 2$*син.* $\frac{1}{2}a$; *син.* $(\frac{1}{2}a + e) =$ *син.* $\frac{1}{2}a +$ *син.* e, и *син.* $(\frac{1}{2}a - e) =$ *син.* $\frac{1}{2}a -$ *син.* e. Въ сходственность этого выведенныя выше двѣ величины Q обратятся въ $Q = \frac{1}{2}P''\left(1 + \frac{Pr' \text{ кос. } f + pg + p'g'}{P''r}\right)$

$= \frac{1}{2}P''\left(1 + \frac{Pn \text{ кос. } f + \frac{pg + p'g'}{r}}{P''}\right)$, по допу-

щеніи $\frac{r'}{r} = n$; и Q =

$$T\left(\frac{P'' + Pn\,кос.\,f + \frac{pg + p'g'}{r}}{P'' - Pn\,кос.\,f - \frac{pg + p'g'}{r}}\right),$$ или по

уничтоженіи знаменателя и по переставкѣ членовъ въ одну сторону $(Q - T)\,P'' - (Q + T)\,Pn\,кос.\,f - (Q + T)\,\frac{pg + p'g'}{r} = o$; но при параллельности концовъ веревки выходитъ $Q + T = P''$; слѣд. все уравненіе можно раздѣлить на P'' и вывести $Q - T - Pn,\,кос.\,f - \frac{pg + p'g'}{r} = o$. А поелику $Q + T = P''$, то получимъ также $Q + T = P + P' + p + p'$; слѣд. $P = Q + T - P' - p - p'$; слѣд. $Q - T - Qn\,кос.\,f - Tn\,кос.\,f + (P + p + p')\,n\,кос.\,f - \frac{pg + p'g'}{r} = o$; отсюда выходитъ

$$Q = T\frac{(1 + n\,кос.\,f)}{1 - n\,кос.\,f} - \frac{(P' + p + p')\,n\,кос.\,f}{1 - n\,кос.\,f} + \frac{\frac{pg + p'g'}{r}}{1 - n\,кос.\,f}.$$

Эту величину Q можно съ пользою употреблять для полиспастовъ. Чтожъ принадлежитъ до величины $Q = \frac{1}{2}P''\left(1 + \dfrac{Pn\,кос.f + \dfrac{pg + p'g'}{r}}{P''}\right)$, то она непосредственно служитъ къ опредѣленію Q, когда будутъ извѣстны P, p, p' и проч.

770. Отсюда и изъ оказаннаго (766) относительно до неподвижнаго блока, заключимъ, что при самомалѣйшемъ напряженіи T и при величайшей силѣ Q, получимъ въ неподвижномъ блокѣ, когда концы веревки будутъ параллельны, $Q = T\left(\dfrac{1 + n\ кос.\ f}{1 - n\ кос.\ f}\right) - p''\left(\dfrac{1 + n\,кос.f}{1 - n\,кос.\,f}\right) + \dfrac{\dfrac{pg + p'g'}{r} + (P + p + p')\,n\,кос.\,f}{1 - n\ кос.\ f}$, а въ подвижномъ $Q = T\left(\dfrac{1 + n\ кос.\ f}{1 - n\ кос.\ f}\right) + \ldots$

$$\frac{\frac{pg + p'g'}{r} - (P' + p + p')\, n \text{ кос. } f}{1 - n \text{ кос. } f}.$$

Таковы суть формулы, по которымЪ опредѣляемЪ величину силы, обращая вниманіе на тяжесть всѣхЪ частей машины.

Ежели тяжесть веревокЪ и блоковЪ будетЪ очень мала вЪ разсужденіи напряженія концовЪ, то можно опустить члены сЪ количествами P', p, p' и p''; вЪ сходственность чего по предположеніи концовЪ паралельными, получимЪ какЪ для подвижнаго, такЪ и неподвижнаго блока $Q = \ldots$

$$T\left(\frac{1 + n \text{ кос. } f}{1 - n \text{ кос. } f}\right).$$

771. ПосмотримЪ теперь, на употребленіе этихЪ правилЪ вЪ полиспастахЪ.

ПосудимЪ о *фигурѣ* 83, и потомЪ отнесемЪ разсужденіе свое ко всякому другому расположенію блоковЪ.

НамЪ неизвѣстно напряженіе конца 1; но означимЪ его чрезЪ T, а чрезЪ T', T'', T''' и проч. напряженія послѣдующихЪ дру-

тихъ концовъ; означимъ равномѣрно чрезъ n, n', n'' и проч. въ каждомъ блокѣ то, что мы разумѣли прежде подъ n въ формулѣ.

По допущеніи сего будемъ имѣть для колеса, которое обхватываютъ концы веревки 1 и 2, $T' = T\left(\frac{1 + n\ кос.f}{1 - n\ кос.f}\right)$.

Для колеса, которое обхватываютъ концы 2 и 3, $T'' = T'\left(\frac{1 + n'\ кос.f}{1 - n'\ кос.f}\right)$.

Для колеса, обхватываемаго концами 3 и 4, $T''' = T''\left(\frac{1 + n''\ кос.f}{1 - n''\ кос.f}\right)$.

Наконецъ для колеса, обхватываемаго концами 4 и 5, (послѣдній сей конецъ предполагается также параллельнымъ съ прочими), $T'''' = T'''\left(\frac{1 + n'''\ кос.f}{1 - n'''\ кос.f}\right)$.

Отсюда явствуетъ, что всѣ прочія напряженія T' T'' T''' T'''' здѣлаются извѣ-

стными, какъ скоро узнаемъ напряженіе T конца 1.

Но условіе, по которому должно опредѣлиться это напряженіе, неминуемо состоитъ въ томъ, что сумма напряженій концовъ 1, 2, 3 и 4 должна равняться грузу P; то есть, что $T + T' + T'' + T''' = P$.

Теперь не трудно вывести общую формулу для величины напряженія послѣдняго конца, то есть, для самой силы. Но какъ эта формула не проще способа, которой мы для сего еще намѣрены показать, и притомъ не такъ легко ее запомнить, то мы непосредственно приступимъ къ сему послѣднему.

772. Замѣтимъ, что ежели вставимъ въ T'' величину T', въ T''' величину T'' сложную изъ первой вставки, въ T'''' величину T''' сложную изъ второй, и такъ далѣе; то получимъ вообще за напряженіе какого нибудь конца напряженіе T послѣдняго, умноженное на строку дробей $\frac{1 + n\ кос. f}{1 - n\ кос. f}$.

$\frac{1 + n' \text{кос.} f}{1 - n' \text{кос.} f}$, относящихся до блоковъ, объемлемыхъ концами веревки, начиная отъ перваго до искомаго. И такъ въ уравненіи $T + T' + T'' + T''' + T'''' +$ и проч. $= P$ первымъ членомъ будетъ T, умноженное на сумму многихъ дробей, зависящихъ отъ измѣреній колесъ и ихъ осей. Явствуетъ также, что при перемѣнѣ P, T перемѣнится само въ одинакомъ съ нимъ содержаніи, хотя измѣренія машины останутся безъ перемѣны. А поелику каждое напряженіе T', T'', T''' изображается чрезъ T, умноженное хотя въ самомъ дѣлѣ на количество разное, но такое, которое не измѣняется отъ перемѣны тяжести; и потому T', T'', T''' и проч. увеличиваются пропорціонально тяжести.

773. По такомъ замѣчаніи выводимъ слѣдующее правило для опредѣленія дѣйствія тренія въ полиспастахъ, состоящихъ изъ всякаго числа блоковъ, когда тяжесть самой машины можно почитать весьма малымъ количествомъ въ разсужденіи поднимаемаго груза.

Возьми произвольно каков нибудь число для означенія напряженія перваго

конца веревки, то есть, того, которой далѣе всѣхъ находится отъ силы; вычисли попеременно напряженіе каждаго послѣдующаго конца по уравненію Q = . . T $\left(\frac{1 + n\ \text{кос.}\ f}{1 - n\ \text{кос.}\ f}\right)$, *въ которомъ* T *полагаемъ теперь извѣстнымъ напряженіемъ,* Q *искомымъ, n содержаніемъ радіуса оси къ радіусу колесъ, объемлемыхъ двумя концами веревки, а* f *угломъ тренія.*

По выкладкѣ сихъ напряженій, последнее изъ нихъ будетъ служить величиною силы, могущей преодолѣть треніе, естьли за напряженіе перваго конца число будетъ взято хорошо.

Сложи вмѣстѣ всѣ напряженія, принадлежащія подвижному палиспасту, и посылай потомъ слѣдующую пропорцію: какъ сумма напряженій по здѣланному предположенію содержится къ напряженію какого нибудь одного конца, выведенному изъ того жъ предположенія, такъ весь вѣсъ къ четвертому члену, которой

изобразитъ въ точности напряженіе того конца, и слѣд. величину силы, естьли за второй членъ пропорціи будетъ взято напряженіе послѣдняго конца.

774. Отнесемъ это правило къ полиспастамъ (*фиг.* 83). Положимъ, что первой конецъ веревки привязанъ къ обоймѣ верхняго блока, что радіусъ каждой оси состоитъ изъ $\frac{1}{6}$ части своего колеса, а треніе изъ $\frac{1}{4}$ давленія. Въ сходственность чего получимъ $n = \frac{1}{6}$; а какъ (747) радіусъ къ тангенсу угла тренія долженъ здѣсь содержаться $= 1 : 4$, то найдемъ по таблицамъ уголъ $f = 75^\circ\ 58'$, котораго косинусъ или *кос.* f будетъ равенъ 0,24249, то есть, близу $\frac{8}{33}$. Слѣд. n *кос.* $f = \frac{4}{99}$, а $\frac{1 + n \text{ кос.} f}{1 - n \text{ кос.} f} = \frac{103}{95}$.

Положимъ, что поднимаемой грузъ P вѣситъ 800 фунтовъ, и возьмемъ произвольно за напряженіе перваго конца 200 фунтовъ, какое должно произойти безъ тренія. По зданному допущенію выведемъ изъ формулы $Q = T\left(\frac{1 + n \text{ кос.} f}{1 - n \text{ кос.} f}\right)$, такое выраженіе за напряженіе втораго конца, Q или $T' = 200 \times \frac{103}{95} = 216,84$ фунтамъ.

Вставивъ въ той же формулѣ T' въ мѣсто T получимъ за напряженіе третьяго конца или $T'' = 200 \times \frac{103}{95} \times \frac{103}{95} = 200 \times \left(\frac{103}{95}\right)^2 = 235,10$ фунтамъ.

Равномѣрно вставивъ T'' въ мѣсто T, будемъ имѣть напряженіе четвертаго конца, $T''' =$

$200 \times (\frac{103}{95})^2 \times \frac{103}{95} = 200 \times (\frac{103}{95})^3 = 254{,}90$ фунтамЪ.

НаконецЪ вставивЪ T''' вЪ мѣсто T'', получимЪ по зделанному предположенію напряженіемЪ пятаго конца, или самой силы Q, $Q = 200 \times (\frac{103}{95})^4 = 276{,}37$ фунтамЪ.

По сложеніи вЪ одну сумму напряженій концовЪ 1, 2, 3 и 4, выходитЪ 906,84 фунтовЪ.

ВЪ сходственность правила (773) дѣлаю такую посылку, 906,84 : 276,37 = 800 кЪ четвертому члену 243,81; слѣд. заключаю, что сила могущая преодолѣть треніе, должна вЪ самомЪ дѣлѣ состоять изЪ 243,81 или $243\frac{4}{5}$, а не изЪ 276,37 или $276\frac{2}{5}$ фунтовЪ.

Естьли вЪ той же пропорціи примемЪ по перемѣнно за второй членЪ величины T, T′, T″ и T‴; то выведемЪ настоящія величины $T = 176{,}44$, $T' = 191{,}29$, $T'' = 207{,}40$ и $T''' = 224{,}87$ фунтамЪ; коихЪ сумма вЪ самомЪ дѣлѣ равна 800, то есть, всему вѣсу, какЪ тому и должно быть.

775. Но ежели вѣсЪ различныхЪ частей машины можетЪ итти вЪ сравненіе сЪ напряженіями концовЪ веревки, то должно вЪ такомЪ случаѣ употребить общія формулы, выведенныя выше. ПокажемЪ примѣрЪ на капрѣ (*фиг.* 128); но прежде дадимЪ формуламЪ новый видЪ.

776. Найдено было для неподвижнаго блока, что $Q = T\left(\frac{1 + n\ кос. f}{1 - n\ кос. f}\right) - \ldots$

$p''\left(\frac{1 + n\ кос.}{1 - n\ кос. f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r}}{1 - n\ кос. f} + \ldots$

$\frac{(P' + p + p')\ n\ кос. f}{1 - n\ кос. f}$; въ этой формулѣ $P' + p + p'$ означаетъ тяжесть веревки и блока съ его осью или безъ оной глядя потому, какъ онъ здѣланъ; p'' тяжесть конца, коего напряженіе принимается въ разсужденіе; $pg + p'g'$ сумму моментовъ двухъ частей веревки, обхватывающей дугу блока, взятыхъ относительно къ вертикалу, проходящему чрезъ центръ блока.

Послѣ чего назвавъ D разстояніе центра тяжести всей веревки отъ вертикала, получимъ $pg + p'g' = (p + p')\ D$.

И такъ представивъ чрезъ P сумму тяжести или вѣса блока (съ его осью или безъ оной) и веревки; чрезъ p вѣсъ одной веревки, а чрезъ q тяжесть того конца, котораго напряженіе допускается извѣстнымъ, будемъ имѣть вообще $Q = T\left(\frac{1 + n\ кос. f}{1 - n\ кос. f}\right) - \ldots$

$$q\left(\frac{1 + n\ кос.f}{1 - n\ кос.f}\right) + \frac{p\frac{D}{r} + Pn\ кос.f}{1 - n\ кос.f}$$

выраженіемъ силы въ неподвижномъ блокѣ, при параллельности концовъ веревки.

А поелику для подвижнаго блока нашли мы $Q = T\left(\frac{1 + n\ кос.f}{1 - n\ кос.f}\right) + \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{pg + p'g'}{r} - (P + p + p')\ n\ кос.f}{1 - n\ кос.f}$$, то употребивъ тѣже названія вещамъ, будемъ имѣть

$$Q = T\left(\frac{1 + n\ кос.f}{1 - n\ кос.f}\right) + \frac{p\frac{D}{r} - Pn\ кос.f}{1 - n\ кос.f},$$

при параллельности концовъ въ подвижномъ блокѣ.

777. И такъ представивъ чрезъ T, T', T'' напряженія концовъ 4, 3, 2 (*фиг.* 128); чрезъ n, n', n'' то, во что обращается n для каждаго блока; чрезъ p, p', p'', во что обращается p; чрезъ P, P', P'', во что обращается P, а чрезъ q, q' и проч., во что обращается q, получимъ за напряженіе кон-

ца 3, $T' = T\left(\frac{1 + n\,кос.\,f}{1 - n\,кос.\,f}\right) -$ . . .

$$q\left(\frac{1 + n\,кос.\,f}{1 - n\,кос.\,f}\right) + \frac{p\frac{D}{r} + Pn\,кос.\,f}{1 - n\,кос.\,f};$$ за

напряженіе конца 2, $T'' = T'\left(\frac{1 + n'кос.\,f}{1 - n'\,кос.\,f}\right)$

$$+ \frac{p'\frac{D}{r'} - P'n'\,кос.\,f}{1 - n'\,кос.\,f}.$$

А для опредѣленія T выведемъ уравненіе $T + T' + T'' = M$, назвавъ M всю тяжесть трехъ концовъ нижняго блока, его обоймы, крюка и поднимаемаго груза.

Что принадлежитъ до напряженія конца 1, то, какъ онъ не параллеленъ съ прочими, мы его вычислимъ послѣ по объявленному (763) способу, а силу, какую должно употреблять на колки E, E и проч. по нижеслѣдующему.

778. И такъ положимъ, что поднимаемой грузъ P (*фиг.* 128) состоитъ изъ пушки 4, вѣсомъ во 1150 фунтовъ; радіусъ каждаго блока въ 4 дюйма, радіусъ оси его въ $\frac{1}{2}$ дюйма, радіусъ каната въ 1 дюймъ; вѣсъ каждаго блока безъ оси и безъ обоймы въ 35 фунтовъ, вѣсъ обоймы, оси и крюка на ниж-

немъ блокѣ въ 12 фунтовъ. Футъ каната вѣситъ $1\frac{1}{2}$ фунта; длина конца 4, шитая отъ точки прикосновенія его къ верхнему блоку, состоитъ изъ 15 футовъ. Разстояніе отъ центра верхняго колеса до центра нижняго $14\frac{1}{2}$ футовъ; сила тренія изъ $\frac{1}{4}$ давленія, и слѣд. также, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ $кос. f = \frac{8}{35} 1$.

Въ сходственность сего будемъ имѣть $\frac{r'}{r}$, или $n = \frac{1}{10} = n'$, а $n\ кос. f = n'\ кос. f = \frac{4}{165}$.

Поелику разность длины двухъ концовъ 4 и 3 состоитъ изъ $\frac{1}{2}$ фута, то можно безъ погрѣшности допустить центръ тяжести ихъ упадающимъ на вертикалъ, проходящій чрезъ центръ объемлемаго ими блока: такимъ образомъ $D = o$, и для большей причины $D' = o$.

Поелику радіусъ каждаго блока вмѣстѣ съ радіусомъ каната = 5 дюймамъ; то часть каната, обхватывающая каждой блокъ, будетъ состоять изъ $\frac{22}{7} \times 5^д$, или изъ $\frac{22}{7} \times \frac{5}{12}ф = \frac{55}{42} = 1ф,31$; слѣд. сумма концовъ 4 и 3, объемлющихъ верхнее колесо будетъ въ 30ф,81, и полагая по $1\frac{1}{2}$ фунта на футъ, повѣситъ 46,21 фунтовъ; а какъ это колесо предполагается тяжестію въ 35 фунтовъ, то выходитъ $P = 81,21$ фунтамъ.

Оба конца 3 и 2 положены длиною въ 30ф,31, и слѣд. будутъ вѣсомъ въ 45, 46 фунтовъ; сложивъ съ этимъ вѣсомъ вѣсъ нижняго блока безъ принадлежностей его, получимъ $P' = 80,46$ фунтамъ.

Напослѣдокъ конецъ 4 будучи длиною въ 15 футовъ, долженъ вѣсить 22, 5 фунта; слѣд. $q = 22,5$ фунтамъ.

Теперь стоитъ только здѣлать вставку всѣмъ этимъ количествамъ въ вышеозначенныхъ величинахъ T′ и T″; и мы получимъ $T' = T \times \frac{169}{161} - 22{,}5 \times \frac{169}{161} + 81{,}21 \times \frac{4}{161}$, и $T'' = T' \times \frac{169}{161} - 80{,}46 \times \frac{4}{161}$; то есть, $T' = 1{,}0510\ T - 21{,}6003$, и $T'' = 1{,}0510\ T' - 1{,}9990$.

Вставивъ въ послѣднемъ уравненіи величину T′, выведенную изъ перваго, будемъ имѣть $T'' = 1{,}1046\ T - 24{,}7009$.

Сумма T, T′, T″ выходитъ $T + T' + T'' = 3{,}1556\ T - 46{,}3012$, которую надобно приравнять ко всей тяжести M.

А поелику M состоитъ 1е. изъ 1150 фунтовъ тяжести орудія; 2е. изъ тяжести концовъ 4, 3 и 2 каната, включая туда же часть его, обхватывающую дугу нижняго блока; но все это вѣситъ 67, 96 фунтовъ; 3е. изъ тяжести нижняго блока, обоймы, оси и крюка вѣсомъ всего на 47 фунтовъ; и потому $M = 1264{,}96$ фунтамъ; слѣд. $3{,}1556T - 46{,}3012 = 1264{,}96$, и $T = \frac{1311{,}2612}{3{,}1556} = 415{,}53$ фунтамъ.

Вставивъ эту величину T въ T′ и T″, будемъ имѣть $T' = 415{,}12$, и $T'' = 434{,}29$ фунтамъ.

Сложивъ эти три величины, получимъ въ суммѣ $T + T' + T'' = 1264{,}94$ фунтамъ разницы не болѣе какъ на 2 сотыя единицы противъ того, чему бы надобно быть.

779. Теперь извѣстно намъ, съ какою силою дѣйствуетъ конецъ 2 на 1. Посмотримъ же, какъ опредѣлится напряженіе конца 1.

Положимъ, что этотъ конецъ дѣлаетъ съ вертикаломъ уголъ въ 15°; слѣд. онъ будетъ дѣлать такой же уголъ съ концомъ 2; и такъ по объявленному (763) надобно допустить $A = 15^{\circ}$.

Припомнимъ, что мы тамъ нашли $Q = \dfrac{P'' \text{ син.} (\frac{1}{2}A + e)}{\text{син.} (\frac{1}{2}A - e)}$, $\text{син. } e = \dfrac{r'}{r} \text{ син. } \frac{1}{2} A \text{ кос.} f$, по принятіи $\dfrac{Pr + pg + p'g'}{P''}$ вмѣсто r.

Припомнимъ также, что P означало тамъ силу, дѣйствующую на вертикальной конецъ каната независимо отъ тяжести его; слѣд. P будетъ значить здѣсь напряженіе T'', уменьшенное тяжестію конца 2; и слѣд. $P = 434{,}29 - 21{,}75 = 412{,}54$ фунтамъ.

Чтожъ принадлежитъ до P'', то оно будетъ представлять сумму тяжести блока безъ оси, съ тяжестію концовъ 1, 2. Положимъ, что конецъ 1 длиною въ 16 футовъ и вѣситъ 24 фунта.

А чтобъ теперь сыскать вѣсъ всего каната, надобно для этого опредѣлить длину обхватываемой имъ дуги.

Изобразимъ чрезъ *eh* и *eg* (*фиг.* 162) концы 2 и 1 (*фиг.* 128); а поелику они составляютъ уголъ въ 15°, то обхватываемая ими дуга *cme* должна быть во 165°; но мы видѣли выше, что для 180° выходило длиннику 1ф,31; слѣд. 165° будутъ содержать въ себѣ 1ф,20; эта длина или величина p' будетъ вѣсить

1,80 фунтовъ, полагая на футъ тяжести 1½ фунта; и такъ сложивъ эту тяжесть съ тяжестью концовъ 2 и 1, получимъ $p + p' = 47,55$ фунтамъ. Слѣд. $P'' = P + P' + p + p' = 412,54 + 35 + 47,55 = 495,09$ фунтамъ.

Опредѣлимъ теперь количества g и g'. Конецъ 2 (*Фиг.* 162) вѣсомъ въ 21,75 фунтовъ, предполагается дѣйствующимъ на разстоянїи 5 дюймовъ или $\frac{5}{12}$ фута отъ вертикала ds; слѣд. моментомъ его будетъ $21,75 \times \frac{5}{12}$.

Посмотримъ, на какомъ же разстоянїи конецъ 1 вѣсомъ въ 24 фунта, и коего центръ тяжести находится на серединѣ n длины его, проходитъ отъ того же вертикала. Для опредѣленїя сего проведемъ радїусъ cf и перпендикуляръ cr на вертикалъ. По предположенїи угла cbe въ 15°, уголъ cfr будетъ 75°. Послѣ чего въ прямоугольномъ треугольникѣ crf, коего бокъ $cf = \frac{5}{12}$ фута, найдемъ $cr = 0ф,4025$.

Проведемъ вертикалъ cq, оканчивающїйся на горизонталѣ nq; въ прямоугольномъ треугольникѣ cqn, по извѣстнымъ $cn = 8$ фут. половины длины конца 1, и углу cnq 75°, найдемъ $nq = 2ф,0706$; слѣд. центръ тяжести n конца 1 удаленъ отъ вертикала ds на 2ф,47; и слѣд. моментъ сего конца состоитъ изъ $24 \times 2,47$. Взявши разность моментовъ $21,75 \times \frac{5}{12}$ и $24 \times 2,47$ обоихъ концовъ, и раздѣливъ ее на сумму 45,75 тяжестей ихъ же, получимъ за разстоянїе общаго центра тяжести ихъ отъ вертикала, $g = -\frac{50,22}{45,75} = -1ф,10$; то есть, центръ тяжести обоихъ концовъ 1 и 2 не будетъ упадать, какъ мы предположили въ общемъ рѣшенїи, къ сторонѣ вертикальнаго конца, но къ сторонѣ конца 1. Опредѣлимъ g'.

Центръ тяжести a покрытой канатомъ дуги cme долженъ находиться на радiусѣ fm, которой раздѣляетъ de по поламъ; а разстоянiе его fa отъ центра f опредѣлится (256) по сей пропорцiи $cme : ce = fm : fa$.

А какъ нашли мы $cme = 1ф,2$, и потому будемъ имѣть $fm = \frac{5}{12}ф$; послѣ чего не трудно вычислить хорду ce 165°, въ которой найдемъ 0ф,83; слѣд. $fa = 0ф,29$.

Проведемъ перпендикуляръ ad на вертикалъ, эта линея ad означитъ g'. А какъ cfm $82^\circ\ 30'$ и уголъ cfd 75°, то уголъ dfa будетъ $7^\circ\ 30'$; въ прямоугольномъ треугольникѣ dfa, гдѣ $fa = 0ф,29$, найдемъ $da = 0ф,04$; слѣд. $g' = 0ф,04$.

Вычисливши такимъ образомъ всѣ количества, входящiя въ выраженiе $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$, и вставивъ ихъ въ ономъ, выведемъ $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''} = \ldots$

$$\frac{412,54 \times \frac{5}{12} - 45,75 \times 1,10 + 1,80 \times 0,04}{495,09} = 0ф,245;$$

это количество надобно вставить вмѣсто r въ $син.\, e = \frac{r'}{r}\, син.\, \frac{1}{2} A\ кос.\, f$.

Поелику радiусъ оси $r' = \frac{1}{2}$ дюйма $= \frac{1}{24}ф$, а $син.\, \frac{1}{2} A = син.\, 7^\circ 30' = 0,13053$, и $кос.\, f = \frac{8}{35}$; и потому $син.\, e = \frac{1}{24 \times 0,245} \times 0,13053 \times \frac{8}{33}$ $= 0,00538$, которой отвѣчаетъ $18'30''$; слѣд. $e = 0^\circ 18'\ 30''$, и слѣд. $\frac{1}{2} A + e = 7^\circ 48'\ 30''$, а $\frac{1}{2} A - e = 7^\circ 11'\ 30''$; слѣд. напряженiе конца 1, которое въ об-

щей формулѣ изображается чрезъ Q, будетъ $Q = P'' \times \frac{\text{син.}\ (\frac{1}{2}A + e)}{\text{син.}\ (\frac{1}{2}A - e)} = 495{,}09 \times \frac{\text{син.}\ 7^\circ\ 48'\ 30''}{\text{син.}\ 7^\circ\ 11'\ 30''}$ $= 495{,}09 \times \frac{0{,}13586}{0{,}12518} = 535{,}73$ фунтамъ; и такъ конецъ I напрягается съ силою 535, 73 фунтовъ.

780. Теперь остается намъ опредѣлить силу, относящуюся до колковъ E, E. Въ этомъ случаѣ надобнобы поступать по способу (760), предписанному для ворота. Но какъ въ этомъ рѣшеніи предполагали мы одну изъ силъ вертикальною, то мы нужнымъ почитаемъ рѣшить здѣсь вопросъ о воротѣ генеральнѣе прежняго (760); а это приведетъ насъ въ состояніе опредѣлять дѣйствіе тренія для ворота во всякомъ случаѣ.

781. Положимъ, что NT, MQ (*фиг.* 163 и 164) означаютъ направленія двухъ силъ T и Q въ равновѣсіи на воротѣ, и что T находится въ самомъ ближайшемъ состояніи перетянуть Q, не смотря на сопротивленіе тренія увеличеннаго тяжестію самой машины, требуется опредѣлить содержаніе T къ Q.

Вообразимъ вертикалъ HI, проходящій по общему центру тяжести всѣхъ тяжелыхъ частей системы. Послѣ чего означивъ чрезъ P вѣсъ всѣхъ частей, коихъ общій центръ тяжести упадаетъ на оси въ C; чрезъ p вѣсъ тѣхъ частей, коихъ центръ тяжести

упадаетъ внѣ оси C; чрезъ g разстояніе общаго центра тяжести сихъ послѣднихъ отъ вертикала, проходящаго по C, будемъ имѣть

$$CI = \frac{pg}{P + p} \text{ (230).}$$

Естьли продолжимъ силу Q до точки B вертикала BI, то изъ стеченія этихъ двухъ силъ родится новая BS, которою можно замѣнить оныя, и которая (216) пройдетъ

на разстояніи $CL = \dfrac{Q \times CM - \dfrac{pg}{P + p} \times (P + p)}{S}$

$= \dfrac{Q \times CM - pg}{S}$, S означаетъ новую составную силу.

Но по извѣстнымъ силѣ Q, углу MBI, которой составляетъ она съ вертикаломъ, и вѣсу $(P + p)$, дѣйствующему по направленію BI, не трудно опредѣлить (559) силу S и уголъ IBS или IBL. Послѣ чего удобно найдется величина CL, которую пусть представляетъ R′; а поелику уголъ TVI, заключающійся между направленіемъ силы T и вертикаломъ, данъ, то не трудно также опредѣлить уголъ TAL, которой составляетъ направленіе той же силы съ направленіемъ S;

потому что TAL = TVI + IBL (*фиг.* 163), и TAL = TVI − IBL (*фиг.* 164).

И такъ для рѣшенія сего вопроса надобно теперь привести въ равновѣсіе силу S съ силою T. Но для этого должно, чтобъ (по предположеніи точки A стеченіемъ направленій обѣихъ сихъ силъ) изъ стеченія обѣихъ этихъ силъ выходила единственная AH, пересѣкающая поверхность оси въ точкѣ D такой, гдѣ бы она могла здѣлать съ этою поверхностію уголъ равный углу тренія.

По предположеніи, что AH выходитъ составною силою изъ двухъ T и S, выведемъ (201) S : T = *син.* TAH : *син.* HAS = *син.* TAD : *син.* LAD; то есть, (*фиг.* 163) S : T = *син.* (TAC − CAD) : *син.* (CAL + CAD); а (*фиг.* 164.) S : T = *син.* (TAC + CAD) : *син.* (CAL + CAD).

И такъ означивъ чрезъ *b* уголъ TAC; чрезъ *a* уголъ CAL; а чрезъ *e* уголъ CAD, получимъ (*фиг.* 163) $T = \frac{S\, син.\,(a + e)}{син\,(b - e)}$,

а для (*фиг.* 164) $T = \frac{S\, син.\,(a + e)}{син.\,(b + e)}$. Но

S извѣстно; чтожъ принадлежитъ до угловъ *a*, *b*, *e*, то вотъ какъ ихъ опредѣлить.

782. Принимая AC за радiусъ, и назвавъ A уголъ TAL, которой мы показали (781), какъ находить, получимъ CN : CL = *син.* TAC : *син.* CAL; то есть, (*фиг.* 163) R : R′ = *син.* (A — *a*) : *син.* *a* = *син.* A *кос.* *a* — *син.* *a* *кос.* A : *син.* *a*, или (по раздѣленiи на *кос.* *a*) = *син.* A — *танг.* *a* *кос.* A : *танг.* *a*.

Слѣд. *танг.* $a = \frac{R' \text{ син. } A}{R + R' \text{ кос. } A}$. Но по извѣстному *a* будетъ извѣстенъ $b = A - a$.

Въ разсужденiи *фигуры* 164 будемъ имѣть R : R′ = *син.* (A + *a*) : *син.* *a* = *син.* A *кос.* *a* + *син.* *a* *кос.* A : *син.* *a* = *син.* A + *танг.* *a* *кос.* A : *танг.* *a*; слѣд. *танг.* $a = \frac{R' \text{ син. } A}{R - R' \text{ кос. } A}$, и $b = A + a$. Чтожъ принадлежитъ до *e*, то для опредѣленiя его будемъ также имѣть CN : CK = *син.* TAC : *син.* CAK; то есть, R : R′ *кос.* *f* = *син.* *b* : *син.* *e*;

слѣд. *син.* $e = \frac{R' \text{ кос. } f \text{ син. } b}{R}$.

783. Возвратимся къ выкладкѣ, относящейся до капра (*фиг.* 128). Допустимъ радїусъ r' шипа въ 1 дюймъ съ $\frac{1}{2}$, или въ $\frac{1}{8}$ фута; радїусъ вала въ 5 дюймовъ, и слѣд. включая туда же радїусъ каната, онъ долженъ быть въ 6 дюймовъ или $\frac{1}{2}$ фута; длину каждаго колка E, E, считая оную отъ оси, въ 4 фута; тяжесть вала съ шипами во 100 фунтовъ; всю тяжесть наружныхъ частей и колковъ въ 15 фунтовъ; и допустивъ наконецъ, что кромѣ одного колка равнаго со всѣми вѣсомъ, не находится болѣе другихъ.

Положимъ также, что на опытѣ найдено невыгоднѣйшимъ положенїемъ для движущей силы то, когда ея направленїе (перпендикулярное къ колку) составляетъ съ концомъ ƒ извѣстный уголъ, на примѣръ уголъ въ 50 градусовъ. И для этого-то положенїя мы приличнымъ почитаемъ здѣлать здѣсь выкладку силъ. Допустимъ наконецъ канатъ нѣсколько намотаннымъ на валъ, и на пр. на 3 съ $\frac{1}{2}$ оборота сего послѣдняго.

Вопервыхъ надобно намъ опредѣлить количества, означенныя (781) чрезъ P, p и g.

Поелику радїусъ вала съ присовокупленїемъ къ нему радїуса каната состоитъ изъ $\frac{1}{2}$ фута, и потому каждой обхватъ каната будетъ въ $\frac{22}{7}$ фута, а три обхвата съ $\frac{1}{3}$ здѣлаютъ $\frac{220}{21}$ фута, которыя, полагая по $1\frac{1}{2}$ фунта на футъ, будутъ вѣсить $\frac{110}{7}$ или 15, 71 фунтовъ. Притомъ же 3 обхвата съ $\frac{1}{3}$ равняются $360^\circ + 120^\circ$ взятымъ три раза; въ сходственность чего естьли допустимъ M (*фиг.* 165) такою точкою, въ которой канатъ ƒ прикасается къ валу, то разстоянїе каната отъ M до N будетъ равно дугѣ MON 120 градусовъ.

Сыщемъ разстояніе центра тяжести g дуги MON отъ вертикала CФ.

Поелику мы предположили конецъ 1, то есть, (*фиг.* 165) MV, составляющимъ съ вертикаломъ уголъ $15°$, то по проведеніи радіуса MC, не трудно примѣтить, что уголъ MCO будетъ 105 градусовъ; слѣд. по продолженіи радіуса *Cr* изъ середины дуги MON $120°$, дуга M*r* здѣлается въ $60°$, а дуга *r*O въ 45 градусовъ.

Теперь не трудно вычислить хорду MN, и мы ее найдемъ въ 0ф,8560; а какъ длина дуги MON состоитъ изъ $\frac{22}{7} \times \frac{1}{3}$ или изъ $\frac{22}{21}$, то разстояніе C*g* (256) центра тяжести этой дуги будетъ въ 0ф 4133. Наконецъ по прямоугольному треугольнику C*gu* найдемъ *gu* = 0ф,2922. Допустимъ *n* центромъ тяжести конца 1, то есть, конца MV; а какъ мы нашли (779) *nq* = 2ф,0706, то по проведеніи вертикала M*t*, будемъ имѣть также *nt* = 2ф,0706. Въ треугольникѣ CM*p*, прямоугольномъ въ *p*, выведемъ M*p* = 0ф,4830; слѣд. S*n* = 1ф,5876.

А поелику колокъ имѣетъ извѣстной вѣсъ и извѣстную длину, то опредѣлимъ разстояніе центра тяжести его отъ вертикала.

Мы допустили, что сила, сообщенная ему перпендикулярно, составляетъ съ концомъ 1 уголъ въ 50 градусовъ; отсюда должно заключить, что этотъ же колокъ CE (*фиг.* 164) будетъ дѣлать съ вертикаломъ уголъ въ $25°$. Положивъ I за середину длины наружной части FE колка, получимъ въ этой точкѣ центръ тяжести ея. А поелику CF = $\frac{1}{2}$ф, а CE = 4ф, то выходитъ CI = 2ф$\frac{1}{4}$; въ прямо-

угольномъ треугольникѣ PCI, по извѣстнымъ дїагонали CI и углу ICP 25°, найдемъ IP = 0ф,9509.

И такъ мы можемъ теперь заключить (230), что общїй центръ тяжести 3 обхватовъ съ $\frac{1}{3}$ конца MV каната и наружной части EF колка удаленъ отъ вертикала CO въ правую сторону на количество =

$$\frac{24 \times nS - 1,63 \times gu - 15 \times IP}{15,71 + 15 + 24} = \ldots$$

$$\frac{24 \times 1,5876 - 1,63 \times 0,2922 - 15 \times 0,9509}{54,71} =$$

$\frac{23,37}{54,71}$; но 54,71 означаетъ (781) p, а опредѣленное теперь разстоянїе есть g; слѣд. $g = \frac{23,37}{p}$, а pg = 23,37. Притомъ же то, что мы означили тамъ чрезъ P, будетъ изображать здѣсь вѣсъ вала съ его шипами, то есть, P = 100 фунтамъ; слѣд. (782) получимъ для *фиг.* 164, CI = $\frac{23,37}{154,71}$, а CL = $\frac{Q \times CM - 23,37}{S}$ = R'.

И такъ надобно опредѣлить Q и S.

Мы опредѣлили (779), что напряженїе въ точкѣ прикосновенїя конца 1 (*фиг.* 128) съ валомъ состоитъ изъ 535,73 фунтовъ, и это напряженїе будетъ принадлежать ко всякой точкѣ длины сего конца, предполагая его безъ тяжести. И такъ должно теперь положить въ точкѣ соединенїя сего конца съ верхнимъ блокомъ, силу Q въ 535,73 фунтовъ, которая совокупно съ тяжестїю конца 1 и остальнымъ вѣсомъ машины, равно какъ съ тренїемъ и подпорными точками приводитъ въ равновѣсїе силу T (*фиг.* 163). Слѣд. Q = 535,73 фунтамъ.

Теперь должно опредѣлить составную силу S изъ Q и всей тяжести машины, имѣющую направленїе по вертикалу, проходящему чрезъ точку I; мы опредѣлимъ тутъ же уголъ IBS, заключающїйся между этою составною силою и вертикаломъ.

И такъ положимъ въ параллелограммѣ ABDC (*фиг.* 166) AB = 535,73; AD = 154,71; уголъ EAB 15 градусовъ. Въ треугольникѣ ACD по извѣстнымъ двумъ бокамъ AC, CD и заключающемуся между ими углу ACD, не трудно опредѣлить AD и уголъ CAD. Мы найдемъ AD = 388,39, а CAD = 159°,5′; то есть, (*фиг.* 164) S = 388,39 фунт. и уголъ IBS = 159°5′. Вставивъ въ выведенной величинѣ R′, 388,39 вмѣсто S, 535,73 вмѣсто Q, и ½ вмѣсто CM, получимъ $R' = \frac{244,49}{388,39} = 0ф,6295$.

И такъ для опредѣленїя T (*фиг.* 164) остается намъ еще вычислить углы A, *a*, *b* и *c* (782). Но уголъ, означенный нами чрезъ A или TAL = TVI — VBS; уголъ же TVI есть ничто иное, какъ склоненїе силы къ вертикалу и состоитъ изъ 65° по здѣланному положенїю. А какъ IBS = 159°5′, то уголъ VBS = 20° 55′; слѣд. A = 44°5′; и слѣд. по объявленному (782) будемъ имѣть *танг.* $a = \ldots$

$$\frac{R' \text{ син. } a}{R - R' \text{ кос. } A} = \frac{0,6295 \times \text{син } 44°5'}{4 - 0,6295 \times \text{кос. } 44°5'} = \ldots$$

$$\frac{0,6295 \times 0,6957}{4 - 0,6295 \times 0,718} = \frac{0,43793}{4 - 0,4541} = \frac{0,43793}{3,53459} =$$

0,12390, которому въ таблицахъ отвѣчаетъ 7° 7′. Слѣд. $a = 7° 7'$, а $b = A + a = 51° 12'$.

А какъ наконецъ (782) найдено, что $син. e = \frac{R' \, кос. f \, син. b}{R}$, и что $кос. f = \frac{8}{33}$, а $син. b =$ 0,77936; то получимъ $син. e = \frac{0,6295 \times \frac{8}{33} \times 0,77936}{4}$ $=$ 0,02973, которому въ таблицахъ отвѣчаетъ $1^\circ 42'$; слѣд. $e = 1^\circ 42'$, и слѣд. $a + e = 8^\circ 49'$, а $b + e = 52^\circ 54'$. Притомъ же (782) $T = \frac{S \, син. (a + e)}{син. (b + e)}$; въ сходственность чего $T = \frac{388,39 \times син. \, 8^\circ 49'}{син. \, 52^\circ 54'} = \frac{388,39 \times 0,15327}{0,79758} = 74,6$ фунтамъ.

И такъ обращая вниманіе на все, то есть, на тяжесть вала, колковъ каната, блоковъ, обоймъ, крючьевъ и проч. находимъ, что сила способная поднять пушку 4 (*фиг.* 128) посредствомъ капра, должна при допущеніи тренія состоять изъ 74,6 фунт.; но безъ тренія и не принимая въ разсужденіе другой тяжести кромѣ вѣсу 1150 фунт. поднимаемой пушки, мы должны бы вывесть (589 и 676) силу не болѣе, какъ въ 47,9 фунтовъ.

784. Мы здѣлали выкладку съ такою точностію, которая совсѣмъ не нужна въ практикѣ; можно дѣлать опущенія нѣкоторымъ обстоятельствамъ, но для этого надобно умѣть судить напередъ о вліяніи ихъ на предметъ, которой имѣемъ въ виду. Способность же такого роду пріобрѣтается не прежде, какъ когда пріучимъ себя разсматривать сначала вещи во всей ихъ строгости; и это-то заставило насъ обратить вниманіе въ выкладкѣ настоящаго примѣра даже и на самомалѣйшія вещи.

785. Способъ, показанной нами на вычисленіе тренія, не сходствуетъ во многомъ съ тѣми, какіе преподаны въ другихъ сочиненіяхъ.

Двѣ причины тому: 1е обыкновенно при вычисленіи тренія принимается точка оси, на которой удерживается весь грузъ во время какъ сила преодолѣваетъ треніе, такою, какою бы она должна быть безъ тренія.

Это допущеніе не можетъ здѣлать большой погрѣшности въ величинѣ, какую нужно прибавить силѣ, пока радіусъ этой оси будетъ гораздо меньше радіуса самаго блока; разность въ результатахъ обоихъ способовъ не можетъ быть чувствительна.

Вторая причина, которой дѣйствіе тѣмъ ощутительнѣе бываетъ, чѣмъ больше употребляется блоковъ, состоитъ въ томъ, что мы свободно полагаемъ въ полиспастахъ (*фиг.* 83) напряженіе конца 1 такимъ же, какъ бы не было тренія; но такое положеніе выводитъ его на самомъ дѣлѣ больше. А какъ излишество увеличивается, смотря по числу блоковъ, то величина, заключаемая о силѣ выходитъ гораздо больше той, какую должно бы получить при треніи. И потому-то сложивъ вмѣстѣ (774) напряженія концовъ 1, 2, 3, 4, вычисленныя по такому положенію, находимъ сумму сихъ напряженій превышающую вѣсъ всего груза, которой нужно подымать; но этому не должно быть при равновѣсіи.

Но скажутъ можетъ быть, что вреда нѣтъ, когда приписываемъ силѣ излишнюю величину. Это правда, однакожъ когда дѣло идетъ о точности или

по крайней мѣрѣ о приближенїи, то это приближенїе не должно быть вдвое, втрое или и проч. больше того, чему надобно вытти. При томже послѣ выкладки, здѣланной сообразно съ условїями вопроса, мы вольны, когда захотимъ, прибавить что нибудь; но и самую прибавку должно дѣлать съ разумомъ.

786. Естьли бы кто спросилъ, почему конецъ I натягивается меньше тогда, когда сила должна преодолѣвать тренїе, чѣмъ тогда, когда бы его не было; то мы на это отвѣчаемъ сообразно съ сказаннымъ (767) такъ: вѣсъ P (*Фиг.* 167) во время какъ сила стремится разрушить равновѣсїе, склоняется къ сторонѣ силы до тѣхъ поръ, пока вертикалъ, проходящїй чрезъ центръ тяжести его, не здѣлаетъ съ поверхностью оси уголъ равный углу тренїя. Безъ тренїя вѣсъ дѣйствуетъ въ C, и слѣд. раздѣляется равно по обоимъ концамъ; но при тренїи тотъ же вѣсъ дѣйствуя въ I, раздѣляется по обоимъ концамъ QG и TF въ содержанїи GF къ IF и GI; слѣд. конецъ QS поднимаетъ больше безъ тренїя, а конецъ FT поднимаетъ напротивъ того меньше.

Что мы теперь говоримъ объ одномъ блокѣ (*Фиг.* 167), относится равно и къ полиспастамъ; по такому же разсужденїю увѣряемся, что каждое колесо полиспаста не одинаково обременяется, и что ось нѣсколько склоняется къ горизонту. Это можно замѣтить также, сравнивъ между собою напряженїя концовъ, вычисленныя (774 и 778). Можно по сравненїи сихъ напряженїй здѣлать выкладку и для силы осей.

787. Выразумѣвшїй хорошо все сказанное нами на вычисленїе движущей силы въ

подвижныхъ и не подвижныхъ блокахъ, въ полиспастѣ, въ воротѣ и другихъ сложныхъ машинахъ, и разсмотрѣвши въ особенности приведенный примѣръ (776 и слѣд.), не трудно послѣ понять, какъ должно поступать съ прочими машинами.

788. Что принадлежитъ до наклоненной плоскости, то вотъ какъ должно опредѣлять на ней содержаніе между силою и тяжестію въ ближайшемъ состояніи послѣдней къ движенію.

Проведемъ чрезъ точку стеченія C направленій силы Q и тяжести P (*фиг.* 168) линею CI, которая бы составила съ плоскостью AB уголъ CIA равный углу тренія. А поелику сила Q приводитъ на ходъ тѣло не прежде, какъ когда 1е составное усиліе изъ нее и тяжести получитъ направленіе по CI; 2е когда точка I, гдѣ линея CI пересѣкается съ плоскостью, будетъ принадлежать также какой нибудь точкѣ основанія RS (безъ чего тѣло должно принять коловратное движеніе), то . . .

По предположеніи сего, получимъ P : Q = *син.* QCI : *син.* PCI; или по проведеніи перпендикуляра CH къ плоскости, = *син.*

(QCH — HCI) : *син.* (PCH + HCI). Но уголъ HCI служитъ дополненіемъ углу тренія къ 90°, а углы QCH и PCH допускаются извѣстными, потому что извѣстно направленіе силы и склоненіе плоскости равное углу PCH; и слѣд. содержаніе P къ Q будетъ также извѣстно.

Естьли захотимъ опредѣлить содержаніе сіе въ линеяхъ; то должно для этого провести чрезъ какую нибудь точку B склоненной плоскости линею BT, дѣлающую съ AB уголъ ABT = HCQ, и линею BV, дѣлающую съ AB уголъ ABV равный HCI дополненію угла тренія къ 90°. Тогда по продолженіи горизонтала AT, получимъ P : Q = VT : BT, потому что уголъ VBT = ABT — ABV = HCQ — HCI, и уголъ BVT = BAV + ABV = PCH + HCI; въ треугольникѣ же BVT будемъ имѣть VT : BT = *син*. VBT : *син*. BVT.

Можно еще, не дѣлая угла ABT = HCQ и угла ABV = HCI, провести BT перпендикулярно къ направленію силы, а BV перпендикулярно къ CI; конструкція сія, по которой мы получимъ тоже, что и по предыдущей, будетъ при томъ во всемъ сходствовать съ объявленнымъ (696).

789. ПоложимЪ для примѣра, что сила Q (*фиг.* 168) должна дѣлать сЪ плоскостью кЪ сторонѣ B уголЪ вЪ 17°; что плоскость склоняется кЪ горизонту на 35°, положимЪ также, что тяжесть P = 800, фунтамЪ, а тренїе состоитЪ изЪ $\frac{1}{3}$ давленїя.

ВЪ сходственность чего получимЪ QCH = 73°; PCH = 35°. ЧтожЪ принадлежитЪ до HCI, то по допущенїи тренїя = $\frac{1}{3}$ давленїя, будемЪ имѣть (744) 1 : 3 = радїусЪ : *танг.* CIH или *кос.* HCI; отсюда выходитЪ уголЪ HCI = 18° 25′.

СлѣД. (788) P : Q = *син.* (73° — 18° 25′) : *син.* (35° + 18° 25′) = *син.* 54° 35′ *син.* : 53° 25′; и слѣд. Q = $\frac{P \times \text{син. } 53^\circ\ 25'}{\text{син. } 54^\circ\ 35'} = 800 \times \frac{0{,}80299}{0{,}81496} = 788{,}25 = 788\frac{1}{4}$ фунтамЪ.

Но безЪ тренїя надлежало бы по пропорцїи P : Q = *син.* HCQ : *син* HCP = *син.* 73° : *син.* 35°, вышли $Q = \frac{P\ \text{син. } 35^\circ}{\text{син. } 73^\circ} = \frac{800\text{фун.} \times 0{,}57358}{0{,}95630} = 479{,}76 = 479\frac{3}{4}$ фунтамЪ.

И такЪ вЪ настоящемЪ случаѣ надобно по причинѣ тренїя увеличить силу 308½ фунтами, дабы она привела вЪ ближайшее состоянїе тѣло двинуться скользомЪ.

790. Второе допущенїе, по силѣ котораго сила Q способна заставить двинуться тѣло скользомЪ, показываетЪ, что вЪ случаѣ когда тѣло будетЪ держаться на поверхности одною точкою, надобно продолженному

направленію силы пересѣкаться съ вертикаломъ, проведеннымъ чрезъ центръ тяжести въ точкѣ C (*фиг.* 169), гдѣ онъ встрѣчается съ линеею IC, которая простираясь отъ точки прикосновенія I, дѣлаетъ съ плоскостью уголъ равный углу тренія.

791. Такимъ же образомъ поступать должно при опредѣленіи дѣйствій тренія втораго рода, то есть, такого, которое надобно преодолѣть тѣламъ, ограниченнымъ кривыми поверхностями, когда онѣ будутъ катиться; что принадлежитъ до тѣлъ ограниченныхъ плоскими поверхностями, то мы о нихъ теперь ничего не скажемъ, потому что онѣ совершенно катиться не могутъ, но только коловращаться по угловатымъ частямъ или острымъ концамъ своимъ, и притомъ законы и величина сего тренія не довольно намъ извѣстны. Но для предыдущихъ способъ опредѣлять треніе совершенно съ показаннымъ одинаковъ, надобно только наблюдать, что уголъ тренія перваго рода ближе подходитъ къ 90°, чѣмъ уголъ тренія втораго рода, Этотъ уголъ во всѣхъ случаяхъ не иначе опредѣляется, какъ по опыту.

792. Къ этому роду относятъ обыкновенно треніе возовыхъ колесъ по землѣ. Но

треніе колеса въ точкѣ D (*фиг.* 170) было бы почти нечувствительно для движущей силы, естьлибъ ступица оставалась безъ тренія на оси; это сопротивленіе, говорю я, было бы не чувствительно потому, что ось унося въ такомъ случаѣ колесо безъ скользу, освобождало бы тѣмъ точку D отъ тренія.

Но естьли ось опираясь о ступицу, будетъ находить тамъ чувствительное треніе, то колесо не прежде можетъ поворотиться, пока не преодолѣетъ движущая сила тренія какъ въ D, такъ и I, то есть, во внутренней части ступицы. Я говорю въ I внѣ вертикала, проходящаго чрезъ центръ оси, а не по точкѣ, гдѣ этотъ вертикалъ пересѣкается съ поверхностію ступицы; ибо не трудно примѣтить, что гнетеніе оси на ступицу должно быть по линеи склоненной къ горизонту, потому что сверхъ тяжести самой повозки находится еще другая сила, которая влечетъ, по направленію какой нибудь линеи HA; слѣд. ось должна опираться о ступицу въ точкѣ I внѣ вертикала, проходящаго чрезъ центръ ея.

Посмотримъ же, какъ дѣйствуетъ движущая сила въ самое то время, когда она преодолѣваетъ треніе.

793. Положимъ, что *de* (*фиг.* 171) означаетъ вертикалъ проходящій чрезъ общій центръ тяжести повозки со всѣмъ ея грузомъ и колесами, а AB направленіе, по которому лошадь влечетъ повозку, и которое имѣетъ какое нибудь склоненіе къ плоскости *ab*. Допустимъ при томъ для легкости одну только лошадь и одно колесо, дѣйствующее въ параллельной плоскости съ каждою парою ихъ въ центрѣ тяжести повозки: мы разсмотримъ сначала вещи въ такомъ видѣ, ибо послѣ не трудно будетъ отнести здѣланное рѣшеніе къ настоящему ихъ быту.

Хотя мы предполагаемъ въ фигурѣ, по которой намѣрены дѣлать свои заключенія, возовой центръ тяжести упадающимъ позади оси; однако все, что мы ни утвердимъ, можно будетъ отнести ко всякому другому положенію его съ перемѣною дѣйствія нѣкоторыхъ силъ.

И такъ по допущеніи центра тяжести упадающимъ позади оси, ясно примѣтить можно, что нѣкоторая часть всего груза будетъ силиться поднимать лошадь. Въ сходственность чего раздѣляю тяжесть воза, которую могу предположить сосредоточенною въ *d* вертикала *de*, на двѣ силы параллельныя съ AE, PQ, изъ которыхъ одна,

именно PQ будетъ дѣйствовать на лошадь, а другая AE совокупно съ силою влеченія, которую означаю чрезъ AB, произведетъ среднюю силу дѣйствующую отчасти на лошадь и отчасти на землю.

А чтобъ PQ имѣло только дѣйствіе на лошадь, то надобно ей проходить по точкѣ P, гдѣ лошадь припрягается къ дышлу; слѣд. эта точка должна быть извѣстна.

Чтожъ принадлежитъ до силы AD, то пока треніе не будетъ преодолѣно, можно почитать колесо съ осью составляющими одно тѣло; и слѣд. эта сила сообщится землѣ по точкѣ прикосновенія K, а лошади по точкѣ P.

Допустимъ G точкою прикосновенія осевой поверхности со внутреннею поверхностью ступицы или втулки. При одолѣніи силою AD тренія, надобно ей пройти по точкѣ G и здѣлать тамъ уголъ съ обѣими поверхностями уголъ равный углу тренія. Однако должно припомнить, что этотъ уголъ тренія не таковъ, какой мы принимали (744) въ тѣлѣ, движущемся по поверхности скользомъ. Точка G оси несется параллельно съ плоскостью *ab*, и треніе, какое она ощущаетъ не таково,

какое бы она ощутила двигаясь по плоской поверхности одинакой со втулками и въ одинакомъ склоненіи къ *ab*. Это треніе не будетъ также одинаково съ тѣмъ, какое должно бы произойти при обращеніи ступицы около неподвижной оси. Это треніе такой поверхности, которая движется на другой, уступающей свободно мѣсто; Слѣд. настоящій уголъ тренія надобно опредѣлить опытомъ.

Какъ бы то ни было, но пока это треніе не будетъ одолѣно, весь возъ, какъ мы уже то замѣтили, будетъ тянуть на землю и на лошадь по дѣйствію силы AD.

Вообразимъ чрезъ точку K, гдѣ колесо касается поверхности земной, прямую линею FK такую, которая бы имѣла направленіе части усилія AD, дѣйствующей на плоскость *ab*, и положимъ, что она пересѣкается съ продолженною AD въ точкѣ L. Въ сходственность чего можно допустить усиліе AD сообщеннымъ въ L по ADO, и означить оное чрезъ LO = AD. Тутъ усиліе LO должно раздѣлиться на два, изъ которыхъ одно LN будетъ усиліемъ колеса противъ земли, а другое LM не должно болѣе имѣть никакого дѣйствія на повозку.

Но усиліе LN должно уничтожиться, потому что мы допускаемъ возъ въ ближайшемъ состояніи къ походу; слѣд. уголъ FK*a* не долженъ быть меньше угла тренія, а безъ этого колесо должно пойти скользомъ. Этотъ уголъ тренія зависитъ отъ свойства земли, отъ оковки колесъ, гвоздей и проч.

Посмотримъ теперь, что происходитъ съ усиліемъ LM, которое не должно имѣть больше никакого дѣйствія на повозку.

Нѣтъ въ томъ сомнѣнія, что это усиліе должно перейти въ точку P, гдѣ лошадь припрягается къ дышлу. И такъ по перенесеніи усилія LM въ PR, и по означеніи чрезъ PQ той части возоваго груза, которая обременяетъ лошадь, діагональ PS параллелограмма QPSR изобразитъ своею величиною и направленіемъ противудѣйствіе повозки на дѣйствіе лошади.

Положимъ, что PS пересѣкается съ вертикаломъ, проведеннымъ чрезъ центръ тяжести лошади, въ точкѣ T, и означимъ чрезъ TV вѣсъ ея, естьли вообразимъ дѣйствіе PS перенесеннымъ въ TX, то изъ стеченія двухъ силъ TV и TX произойдетъ новое усиліе TY, то самое, которое лошадь на-

стояще употребляетЪ противЪ земли. А поелику предполагается равновѣсіе, то надобно усилію TV дѣлать сЪ плоскостью *ab* уголЪ TZ*b* больше угла тренія, а безЪ этого лошадь начнетЪ скользить; и при томЪ надобно еще (691) точкѣ Z упадать промежду всѣхЪ ногЪ лошади.

794. ТакимЪ-то образомЪ тяжесть повозки, грузЪ ея, тяжесть колесЪ и дѣйствіе лошади раздѣляются на одолѣніе тренія. Отсюда явствуетЪ, что тяжесть повозки, будетЪ ли она упадать спереди оси, или по правую или по лѣвую сторону ея, должна всегда производить нѣкоторое дѣйствіе на лошадь, то есть, будетЪ всегда или поднимать ее, или тянуть кЪ низу. Другая же часть AE сей тяжести совокупляется сЪ силою влеченія, откуда выходитЪ новая AD такая, которая одолѣваетЪ треніе, то есть, нудитЪ скользить ось по внутренней поверхности ступицы. Эта сила AD дѣйствуетЪ какЪ на землю, такЪ и на лошадь вЪ сходственность раздѣленія ея или LO на двѣ другія LN и LM; по дѣйствію первой колесо упирается о землю, какЪ о неподвижную точку, а дѣйствіе другой LM переходитЪ на лошадь вЪ точкѣ, гдѣ она припрягается кЪ дышлу. ТутЪ сила сія совокупляется сЪ частію PQ

возовой тяжести, дѣйствующей также на лошадь, и производитъ усиліе PS, которое пересѣкаясь въ T съ вертикаломъ, проходящимъ чрезъ центръ тяжести животнаго, совокупляется съ тяжестію онаго и производитъ усиліе TY, по дѣйствію котораго лошадь принуждена бываетъ упираться о землю и наклоняться впередъ, что мы всегда на опытѣ видимъ, когда она принимаетъ.

795. Точку *d*, гдѣ вертикалъ, проходящій чрезъ центръ тяжести повозки и груза ея, пересѣкаетъ направленіе силы влеченія, равно какъ и точку P, гдѣ припрягается лошадь къ дышлу, должно почитать извѣстными. Слѣд. когда точка A будетъ извѣстна, то нетрудно опредѣлить (205) величину силъ AE и PQ; а какъ уголъ BAE, извѣстенъ, и притомъ CA и CH извѣстны также, первая по положенію, а другая какъ перпендикуляръ къ AD, потому что радіусъ CG оси и уголъ CGA дополненіе углу тренія къ 90° извѣстны; послѣ чего не трудно найти углы DAE и DAB, и слѣд. содержаніе AE къ AB; но по извѣстному содержанію AE къ тяжести возовой, опредѣлимъ содержаніе сей послѣдней къ движущей силѣ.

796. Отсюда явствуетъ, что содержаніе возовой тяжести къ движущей силѣ зависитъ единственно отъ положенія точки A. Но между условіями, которыя замѣтили мы нужными для равновѣсія, находятся три, коимъ удовлетворить можно безчисленными образами. Въ самомъ дѣлѣ настоящимъ предметомъ полагается здѣсь, чтобъ повозка шла на колесахъ катомъ, а не скользомъ, ибо въ послѣднемъ случаѣ движущей силѣ надобно бы употребить самое величайшее возможное усиліе; но для преодолѣнія тренія въ первомъ случаѣ довольно и того, когда точка K будетъ имѣть довольно твердости къ сопротивленію; слѣд. величину угла FK*a* можно почитать естьли не произвольною, то по крайней мѣрѣ весьма неограниченною. Тоже должно утвердить и объ углѣ TZ*b*; а какъ точка Z не по иному чему опредѣлена, какъ что она должна упадать промежду всѣхъ ногъ лошади, то явствуетъ также, что и точка A можетъ имѣть безчисленное множество разныхъ положеній, при которыхъ равновѣсіе совсѣмъ тѣмъ не потеряется.

797. А поелику положеніе точки A перемѣняетъ содержаніе силы къ тяжести, то надобно опредѣлить для нее такое, при которомъ бы содержаніе сіе вышло самомалѣйшее,

то есть, гдѣбъ сила употреблялась самая малая. Опредѣлимъ же точку A по такому допущенію.

Проведемъ прямую линею CA перпендикуляръ CI къ направленію влеченія, перпендикуляръ CH на AD, радіусъ CG оси и горизонталъ *kCn*, пересѣкающій въ *n* вертикалъ QP, а въ *m* вертикалъ TV.

Означивъ чрезъ *f* уголъ тренія, коему дополненіемъ къ 90° служитъ CGH, а чрезъ *r* радіусъ CG оси, въ треугольникѣ CHG получимъ CH $=$ *r. кос. f.*

Положимъ изъ извѣстныхъ или данныхъ вещей линею CI $= a$, уголъ IAE $= m$, линею C*k* $= b$, линею *kn* $= c$, и наконецъ неизвѣстную линею AI $= x$.

По предположеніи сего, въ прямоугольномъ треугольникѣ CIA будемъ имѣть CA $= \sqrt{(aa + xx)}$, эту величину для сокращенія означаю чрезъ; S слѣд. *син.* CAI $= \frac{a}{S}$, *кос.* CAI $= \frac{x}{S}$, по предположеніи табличнаго радіуса $= 1$.

А поелику уголъ CAE $=$ IAE $-$ CAI, то (*Геом.* 286 и 287) найдемъ *син.* CAE $=$

$\frac{x\,\text{син.}\,m - a\,\text{кос.}\,m}{S}$; a *кос.* CAE $=$ . . . .
$\frac{x\,\text{кос.}\,m - a\,\text{кос.}\,m}{S}$.

По треугольнику CAH опредѣлимъ *син.* CAH или *син.* CAD $= \frac{r\,\text{кос.}\,f}{S}$ . . . ; a *кос.* CAD $= \sqrt{\frac{(SS - r^2\,\text{кос}^2.\,f)}{S}}$.

А какъ EAD $=$ CAD $-$ CAE, то будетъ имѣть *син.* EAD $=$ . . . .
$\frac{r\,\text{кос.}\,f\,(x\,\text{кос.}\,m + a\,\text{син.}\,m) - (x\,\text{син.}\,m - a\,\text{кос.}\,m)\sqrt{(S^2 - r^2\,\text{кос}^2.\,f)}}{SS}$;
a *син.* DAB $= \frac{a\sqrt{(S^2 - r^2\,\text{кос}^2.\,f)} + rx\,\text{кос.}\,f}{SS}$,
потому что *син.* DAB $=$ *син.* IAD $=$ *син.* (CAI $+$ CAD).

Представивъ чрезъ Q силу AB, а чрезъ P′ силу AE, получимъ (201) P′ : Q $=$
$\frac{a\sqrt{(S^2 - r^2\,\text{кос}^2.\,f)} + rx\,\text{кос.}\,f}{SS}$: . . . . .
$\frac{r\,\text{кос.}\,f\,(x\,\text{кос.}\,m + a\,\text{син.}\,m) - (x\,\text{син.}\,m - a\,\text{кос.}\,m)\sqrt{(S^2 - r^2\,\text{кос}^2.\,f)}}{SS}$,
и слѣд. Q $=$ P′ $\times$ . . . .
$\frac{[r\,\text{кос.}\,f\,(x\,\text{кос.}\,m + a\,\text{син.}\,m) - (x\,\text{син.}\,m - a\,\text{кос.}\,m)\sqrt{(S^2 - r^2\,\text{кос}^2.\,f)}]}{a\sqrt{(S^2 - r^2\,\text{кос}^2.\,f)} + rx\,\text{кос.}\,f}$,

Посмотримъ теперь, какая должна быти величина для P'.

Въ силу зделаннаго нами (793) разделенія и по обьявленному (205) будемъ имѣть, представивъ чрезъ P всю тяжесть повозки, $P:P' = ln : kn = kn - kl : kn$; слѣд. $P' = \frac{P \times kn}{kn - kl} = \frac{Pc}{c - kl}$.

При томъ же $kl = kC + Cl = b + Cl$, и по треугольнику CAL находимъ $Cl = CA$ *син.* CAE $= S \times \frac{x \text{ син } m - a \text{ кос. } m}{S} = x$ *син.* $m - a$ *кос.* m; слѣд. $kl = b + x$ *син.* $m - a$ *кос.* m, и слѣд. $P' = \frac{Pc}{c - b - x \text{ син. } m + a \text{ кос. } m}$; наконецъ $Q = Pc \times$

$$\frac{r \text{ кос.} f(x \text{ кос.} m + a \text{ син } m) - (x \text{ син.} m - a \text{ кос.} m)\sqrt{(S^2 - r^2 \text{ кос}^2. f)}}{(c - b - x \text{ син. } m + a \text{ кос. } m)[a\sqrt{(S^2 - r^2 \text{ кос}^2. f)} + rx \text{ кос.} f]}.$$

А поелику Q должно представлять самомалѣйшее количество или *minimum*, то надобно (33) одифференціалить величину его, и приравнять выведенный дифференціалъ къ нулю.

798. Но какъ уравненіе въ x, выходящее изъ этой дифференціаціи будетъ весьма

сложно, то мы не выходя изъ границъ, не можемъ заняться подробно заключеніями онаго.

799. Хотя же отъ рѣшенія этого уравненія зависитъ опредѣленіе искомой самомалѣйшей силы, могущей привести повозку въ движеніе; однако можно вывести другое въ Q и данныхъ, гораздо проще того. Можно Алгебраическими способами уничтожить x посредствомъ дифференціальнаго уравненія и уравненія въ x, выражающаго величину Q; послѣ чего получимъ новое уравненіе въ Q и въ количествахъ, отъ которыхъ зависитъ Q, и именно въ этомъ уравненіи будутъ заключаться движущая сила, радіусъ оси, уголъ тренія, грузъ повозки, разстояніе центра тяжести его отъ оси, горизонтальное разстояніе оси отъ точки, гдѣ припрягается лошадь къ дышлу, разстояніе направленія силы влеченія отъ оси и уголъ склоненія этой силы къ вертикалу. Но какъ послѣдній уголъ и горизонтальное разстояніе оси отъ точки дышла, гдѣ лошадь припрягается, зависятъ отъ склоненія плоскости, высоты лошади и радіуса колеса; и потому въ самомъ дѣлѣ получаемъ уравненіе въ Q и во всѣхъ вычисленныхъ разныхъ элементахъ, отъ которыхъ оно зависитъ. И по этому-то уравненію можно заключить о содержаніи измѣреній ча-

стей повозки, при которомъ бы сила Q могла быть употреблена самомалѣйшая.

800. Отсюда явствуетъ, что запросы относящіеся до влеченія возовъ на колесахъ сверхъ Физической трудности, которая встрѣчается намъ при опредѣленіи тренія, не такъ-то просты сами по себѣ, какъ они кажутся съ перваго разу. Притомъ же мы должны вывести содержаніе между силою и возовою тяжестію весьма несходное съ настоящимъ, сравнивая дѣйствіе ихъ съ дѣйствіемъ какой нибудь тяжести и силы, могущихъ здѣлать равновѣсіе на склоненной плоскости *ab* безъ всякаго другаго пособія кромѣ сопротивленія, находящагося въ К. Въ такомъ предположеніи сила и тяжесть должны находиться въ обратномъ содержаніи съ перпендикулярами, проведенными изъ точки К на ихъ направленія, какого бы свойства впрочемъ треніе ни было; потому что по допущеніи точки К такою, которая противится, составная изъ обѣихъ тѣхъ силъ должна пройти по оной точкѣ К.

801. Когда же повозку станетъ везти лошадь не дышломъ, но посредствомъ постромки, тогда можно принимать все простымъ равновѣсіемъ между силою и тяжестью на

наклоненной плоскости, потому что составная сила изъ обѣихъ сихъ, будетъ дѣйствовать на одну повозку, но на лошадь не будетъ имѣть никакого дѣйствія; и слѣд. по предположеніи равновѣсія, она должна проходить по точкѣ К, а сила тренія оси во втулкахъ должна быть больше того усилія, которое стремится разлучить ихъ; безъ чего ось была бы принуждена коловращаться въ ступицѣ, нимало не поворачивая колеса.

802. Сила, употребляемая лошадью при переходѣ колеса по какому нибудь препятствію *r* (*фиг.* 171), бываетъ совсѣмъ отмѣнита отъ прежней. Тутъ надобно не катить повозку, но поворотить всю ее со всѣми принадлежностями, составляющими какъ бы единое тѣло, около точки *r*. Сопротивленіе тренія оси въ ступицѣ должно быть въ такомъ случаѣ очень велико, чтобъ общія ихъ поверхности оставались неразлучными въ продолженіе сего дѣйствія, а сила составная изъ возовой тяжести и дѣйствія лошади проходить по точкѣ *r*. Въ этомъ случаѣ обѣ сіи силы находятся между собою въ обратномъ содержаніи перпендикуляровъ, проведенныхъ изъ точки *r* на ихъ направленія. А какъ явствуетъ, что сила влеченія тѣмъ далѣе будетъ находиться отъ точки *r*,

чѣмъ радіусъ колеса будетъ больше; то явствуетъ, что большія колеса имѣютъ большую выгоду въ разсужденіи маленькихъ, хотя эту выгоду не можно принимать точно въ содержаніи радіуса.

Надобно бы еще много кое чего сказать въ разсужденіи этой матеріи; но мы довольно изъяснили правилъ для рѣшенія вопросовъ такого рода. Не трудно здѣлать этому примѣненіе къ дѣйствіямъ отбоя орудій на лафеты, равно какъ и къ повозкамъ всякаго рода.

803. Треніе можетъ производить также совсѣмъ отличныя движенія отъ тѣхъ, какія бы должны быть безъ него. Разсмотримъ нѣкоторыя изъ нихъ.

Мы упоминали нѣсколько разъ (290) и въ другихъ мѣстахъ о томъ, какое должно произойти движеніе въ свободномъ тѣлѣ BOQ (*фиг* 172), которое получитъ побужденіе къ тому не по направленію, проходящему чрезъ центръ тяжести его. Но естьли это тѣло будетъ двинуто снаружи по какому нибудь направленію AB, то оно не можетъ получить всей силы даннаго ему удара; ибо сила эта должна раздѣлиться на двѣ другія, изъ которыхъ одна будетъ по касательному направленію къ поверхности тѣла, а другая по перпендикуляру BC къ оной. Безъ тренія побудительная сила не имѣла бы никакого

дѣйствія на тѣло по тангенсу, а перешла бы вЪ него по одному BC; эта сила заставила бы его коловращаться вЪ такомЪ случаѣ, когда бы направленіе ея не могло пройти по центру тяжести G. Отсюда слѣдуетЪ заключить, что сферическое тѣло, состоящее изЪ одной матеріи, никогда бы не могло покатиться, естьли бЪ не было тренія, потому что перпендикулярЪ кЪ поверхности шара проходитЪ всегда чрезЪ центрЪ фигуры, которой вмѣстѣ служитЪ и центромЪ тяжести. Но при треніи дѣло бываетЪ другое: сила по тангенсу переходитЪ вЪ тѣло по шароховатой поверхности его тѣмЪ больше, чѣмЪ шароховатость причастнѣе будетЪ кЪ тренію; такимЪ образомЪ сверхЪ движеній могущихЪ произойти по BC, тѣло будетЪ коловращаться, а центрЪ тяжести подаваться впередЪ параллельно сЪ тангенсомЪ такЪ, какЪ бы сила равная тренію начала тянуть точку B по этому направленію снуркомЪ, привязаннымЪ кЪ той же точкѣ B.

804. ПоложимЪ, что твердое и шарообразное тѣло ABC (*фиг.* 173) при свободномЪ паденіи на горизонтальную плоскость HR получаетЪ, по какой бы то причинѣ ни было, коловратное движеніе около центра тяжести своей; безЪ тренія тѣло это упавЪ

на плоскость, должно бы сохранить коловратное движеніе, а центрЪ тяжести долженЪ бы остаться неподвижнымЪ. Но при треніи какЪ скоро тѣло прикоснется кЪ плоскости, то должно покатиться отЪ I кЪ R или отЪ I кЪ H, глядя по тому, вЪ какую сторону будетЪ происходить коловратное движеніе, вЪ сторону ли CAB или BAC; потому что сопротивленіе, происходящее отЪ тренія на плоскости, будучи равно такой силѣ, которая бы стала дѣйствовать на то же тѣло по направленію противному его движенію, должно сообщить ему (290) два движенія, одно параллельное сЪ плоскостью и другое коловратное, потому что это сопротивленіе не проходитЪ чрезЪ центрЪ тяжести тѣла; оно должно сообщить ему оба сіи движенія вЪ противную сторону сЪ настоящимЪ его коловратнымЪ; послѣднее изЪ нихЪ будетЪ уменьшать безпрестанно начальное коловратное движеніе, отЪ чего движеніе центра здѣлается скорѣе, однако до нѣкотораго только предѣла, послѣ же начнетЪ уменьшаться и уничтожается вмѣстѣ сЪ коловратнымЪ движеніемЪ.

805. ЭтимЪ весьма легко можно изЪяснить те, для чего сферическое тѣло ABC (*фиг.* 174) будучи ударено по DB подается напередЪ кЪ сторонѣ IE, потомЪ поворачивается отЪ E кЪ I и переходитЪ

за эту точку къ F. Побужденіе по DB заставляетъ его вертѣться (по силѣ тренія въ B) по ABC, и катиться къ сторонѣ IE; но какъ треніе на плоскости выходитъ перваго рода, то движеніе центра тяжести скоро уничтожается, и коловратное движеніе сообщаетъ ему новое въ противную сторону какъ въ предыдущемъ случаѣ.

2е. Для чего ядро, какъ то часто случается, упавъ, кажется, лишается всей своей силы, но потомъ воспринимаетъ ее съ большимъ стремленіемъ. Изверженное силою пороха ядро, пролетая по каналу орудія получаетъ отъ тренія со стѣнами его коловратное движеніе, которое измѣняется мало въ воздухѣ; но при его прикосновеніи къ землѣ, это коловратное движеніе производится со стороны поверхности земли въ противную сторону стремленія ядра; слѣд. (804) должно произойти ускореніе въ движеніи центра, то есть, въ движеніи стремленія ядра. Эту причину должно присовокупить также къ показаннымъ (488 и слѣд), и именно къ тѣмъ, которыя производятъ рикошеты или способствуютъ имъ; ибо изъ предыдущаго не трудно понять, что и въ самое то время, когда бы центръ на мгновеніе оставался неподвиженъ, коловратное движеніе способно одно освободить ядро изъ ущемины его въ землю.

806. Впрочемъ сколько треніе вредно во многихъ случаяхъ, столько же часто бываетъ и полезно. Безъ тренія при малѣйшей покатости, встрѣтившейся на пути нашемъ, мы должны бы упасть. Никогда бы человѣкъ или животное принужденъ будучи бѣжать съ быстротою около неподвижной точки C (*фиг.* 175) не обошолся безъ того, что бы не упасть, какое бы онъ положеніе ни старался взять; напротивъ же того по силѣ тренія онъ можетъ скло-

ниться къ точкѣ C, вокругъ которой обращается; и тѣмъ здѣлать, что тяжесть его, имѣющая направленіе по вертикалу GK, проходящему чрезъ центръ тяжести G, и центробѣжная сила GF, получаемая имъ отъ коловращенія и имѣющая направленіе отъ C къ F, совокупнымъ дѣйствіемъ своимъ производитъ новую единственную силу по линеѣ GI, проходящей чрезъ точку I, заключающуюся между ногъ животнаго; но эта сила, хотя и коственная, отнюдь не уничтожится, лишь бы склоненіе было здѣлано приличное тому, какого требуетъ треніе.

807. Треніе имѣетъ многія другія выгоды; ибо посредствомъ его очищаются и полируются поверхности тѣлъ; отъ него получаемъ мы способъ дѣлать части нѣкоторыхъ машинъ подвижными или напротивъ. Чрезъ треніе ножницы и всѣ острыя орудія, также щипцы, клещи, пилы и проч. производятъ свое дѣйствіе. Естьлибъ острее ножницъ не имѣло въ сущности мѣльчайшихъ зубцовъ на подобіе пилы, то бы нечѣмъ было имъ захватывать разрѣзываемую матерію и производить свое дѣйствіе.

808. Треніе помогаетъ также весьма часто двигать тѣла въ произвольную сторону; такъ на примѣръ желая поднять тѣло P (*фиг.* 176) рычагомъ AB, удобно въ томъ успѣваемъ, и какъ явствуетъ изъ *фигуры*, вся тяжесть сего тѣла держится на боку его CD; ибо чрезмѣрно большое треніе дѣлаетъ CD не подвижнымъ и не даетъ ему скользить. По той же силѣ держится твердо и конецъ A рычага. Ежели въ настоящемъ

случаѣ пожелаемъ узнать содержаніе тяжести P къ силѣ Q (что мы опустили объяснить въ 621), то должно вообразить бремененіе тѣла P, имѣющее направленіе по вертикалу GK, которой проходитъ чрезъ центръ его тяжести G, раздѣлить на двѣ параллельныя силы, на одну которая проходитъ по точкѣ I, гдѣ тѣло держится на рычагѣ, и на другую, которая проходитъ по точкѣ бока CD, лежащей въ плоскости двухъ параллелей GK и IM; тогда сила, выходящая изъ того въ I, будетъ содержаться къ P = EK : EM (205). При томъ же естьли изъ A проведемъ на IM перпендикуляръ AL, то сила Q будетъ содержаться къ силѣ I = AL : AB; отсюда заключаемъ Q : P = AL × EK : AB × EM. Впрочемъ треніе же, а не другое что заставляетъ насъ почитать силу по IM всю въ цѣлости сообщенною рычагу въ точкѣ I; потому что безъ него рычагъ получилъ бы только нѣкоторую часть этой силы, долженствующей дѣйствовать по перпендикуляру AB.

809. Остается намъ еще разсмотрѣть треніе въ веревкѣ, которая обхватываетъ какую нибудь кривую поверхность ABC (*фиг.* 177), и которую за концы тянутъ двѣ силы. Положимъ *ab*, *ad* двумя смежны-

ми частями веревки, и продолживъ ихъ представимъ чрезъ *ac*, *ae* напряженія тѣхъ двухъ частей. Естьли здѣлаемъ параллелограммъ *acfe*, то *af* означитъ силу составную изъ сихъ напряженій и слѣд. ту, по которой веревка будетъ стремиться скользить. Въ сходственность чего надобно *af* дѣлать съ кривою поверхностью уголъ *caf* равный углу тренія.

По допущеніи сего означимъ чрезъ T напряженіе части *ab*, которая больше натянута, послѣ чего T — *d*T изобразитъ напряженіе части *ad*. И такъ получимъ $T : T - dT =$ *син. fae* : *син. fac* = *син.* (*cae* — *fac*) : *син. fac* = *син. cae кос. fac* — *син. fac. кос. cae* : *син. fac.* Но *cae* = 180° — *cah*; слѣд. (*Геом.* 279) *син. cae* = *син. cah*, и *кос. cae* = — *кос. cah*; поелику уголъ *cah* безконечно малъ, то можно принять *кос. cah* = 1. Въ сходственность сего будемъ имѣть T : T — *d*T = *син. cah кос. fac* + *син. fac* : *син. fac*; и слѣд. T *син. fac* = T *син. cah кос. fac* + T *син. fac* — *d*T *син. cah кос. fac* — *d*T *син. fac*, или по уничтоженіи въ обѣихъ частяхъ T *син. fac* и по опущеніи члена *d*T *син. cah кос fac* какъ такого количества, которое по причинѣ безконечно малаго угла *cah* становится безконечно меньше члена *d*T

син. fac, будемъ наконецъ имѣть dT *син. fac* $=$ T *син. cah кос. fac*, или $dT = $ *танг. fac* $=$ T *син. cah*, раздѣливъ на *кос. fac.*

Проведемъ (55) радіусы развертки (*la développée*) *ar*, *dr* къ точкамъ *a* и *d*. Уголъ *cah* будетъ равенъ углу *ard*, потому что *ar* и *dr* перпендикулярны къ *ab*, *ad* или *ah*; при томъ же въ прямоугольникѣ треугольникѣ *rda* представивъ чрезъ R радіусъ *ra* развертки, чрезъ *s* длину P*ba* веревки и чрезъ — *ds* малую часть *ad*, потому что когда T увеличивается, тогда *s* уменьшается; получимъ R : — *ds* $=$ *син. ard* или *син. cah* : 1. Слѣд. *син. cah* $= \frac{-ds}{R}$, и слѣд. dT *танг. fac* $= \frac{-Tds}{R}$. Но естьли чрезъ *f* означимъ уголъ тренія, то *танг. fac* $=$ *танг. f*; въ сходственность чего dT *танг.* $f = \frac{-Tds}{R}$; или

$$dT = \frac{-Tds}{R \text{ танг. } f}.$$

Вотъ уравненіе, которое будетъ служить къ опредѣленію T напряженія веревки въ какой нибудь точкѣ длины ея *s* какъ по сообщенной ей силѣ P, такъ и по причинѣ тренія.

810. Когда бы тренія не было никакого, тогда уголъ тренія здѣлался бы въ 90°, *танг.* f безконечнымъ, и слѣд. величина dT превратилась въ безконечно малую, то есть, здѣлалася бы $= o$. Слѣд. веревка въ такомъ случаѣ имѣла бы одинаковое напряженіе во всѣхъ своихъ точкахъ, какъ тому и должно быть въ самомъ дѣлѣ (509).

811. Мы употребимъ это уравненіе для веревокъ, которыя обвиваются около цилиндрическихъ поверхностей.

Въ поверхностяхъ такого рода радіусъ R развертки бываетъ вездѣ одинаковъ и равенъ радіусу круговаго сѣченія цилиндра. Слѣд. уравненіе $d\mathrm{T} = \frac{-\mathrm{T}ds}{\mathrm{R}\ \text{танг.}f}$, или $\frac{d\mathrm{T}}{\mathrm{T}} = \frac{-ds}{\mathrm{R}\ \text{танг.}f}$ въ такомъ видѣ не трудно обынтегралить, и мы получимъ интеграломъ его *лог.* $\mathrm{T} = \frac{-s}{\mathrm{R}\ \text{танг.}f} + \mathrm{C}$.

Для опредѣленія постояннаго количества C надобно примѣтить, что при точкѣ m, гдѣ веревка отстаетъ отъ поверхности, напряженіе T становится равно силѣ P. И

такъ представивъ чрезъ a длину части mP, надобно при $s = a$, напряженію $T = P$. Въ сходственность сего получимъ *лог.* $P = \frac{-a}{R\ танг. f} + C$, и слѣд. $C =$ *лог.* $P + \frac{a}{R\ танг. f}$. Слѣд. *лог.* $T =$ *лог.* $P + \frac{a-s}{R\ танг. f}$, или *лог.* $P -$ *лог.* $T = \frac{s-a}{R\ танг. f}$, или наконецъ *лог.* $\frac{P}{T} = \frac{s-a}{R\ танг. f}$; и это-то означаетъ содержаніе напряженія T къ силѣ P въ какой нибудь точкѣ веревки.

Дабы показать это на примѣрѣ, положимъ, что въ *фигурѣ* 122 сопротивленіе груза P натягиваетъ часть каната, заключающуюся между имъ и валомъ ворота съ силою 3000 фунтовъ. Положимъ также радіусъ вала въ 6 дюймовъ, а радіусъ каната въ 1 дюймъ; такимъ образомъ должно принимать здѣсь за R 7д или $\frac{7}{12}$ фута. Спрашивается какова должна быть сила T, когда канатъ обойдетъ четыре раза около вала, могущая удержать его отъ скользкости по валу, допустивъ треніе равнымъ четвертой доли гнетенія, а это дѣлаетъ *танг.* $f = 4$?

Не трудно примѣтить, что четыре обхвата веревки будутъ длиною въ $\frac{44}{3}$ дюйм. Слѣд. $s - a = \frac{44}{3}$, $P = 3000$ фунтамъ, $R = \frac{7}{12}$, и *танг.* $f = 4$.

Въ сходственность сего будемъ имѣть *лог.* $\frac{P}{T}$ = *лог.* $\frac{3000}{T} = \frac{\frac{44}{3}}{1\frac{7}{22} \times 4} = \frac{44}{7}$. А какъ этотъ логариѳмъ гиперболической, то для опредѣленія $\frac{P}{T}$ . . посредствомъ обыкновенныхъ таблицъ, надобно (88) умножить логариѳмъ его $\frac{44}{7}$ на 0,4342945; послѣ чего будемъ имѣть *лог.* $\frac{3000}{T}$ = 2,7298511, или *лог.* 3000 — *лог.* T = 2,7298511; слѣд. *лог.* T = *лог.* 3000 — 2,7298511 = 3,4771213 — 2,7298511 = 0,7472702, которой въ таблицахъ отвѣчаетъ числу 5,59 или $5\frac{3}{5}$; слѣд. T = $5\frac{3}{5}$ фунт. И такъ сила равная $5\frac{3}{5}$ фунт. будетъ способна при помощи тренія четырехъ обхватовъ каната, удержать этотъ канатъ имѣющій 4д. въ радїусѣ отъ скользкости на валѣ 6 дюймовъ въ радїусѣ, по допущеніи тренія равнымъ четвертой доли гнетенія, а преодолѣваемое усиліе въ 3000 фунтовъ.

812. Но какъ въ семъ рѣшеніи предполагается, что веревка прилегаетъ плотно всѣми точками къ поверхности, то оно выводитъ дѣйствіе тренія гораздо большимъ, нежели каково оно въ самомъ дѣлѣ должно быть, естьли будетъ употребленъ тотъ же уголъ тренія, какой былъ опредѣленъ для скользкости одной поверхности на другой. Но какъ не такъ-то легко опредѣлить прямо содержаніе прикосновенной части каната ко всѣмъ промежуткамъ завитковъ его, то вотъ какъ посредствомъ предыдущей формy-

лы помочь вѣ недостаткѣ сего свѣдѣнія. Мы нашли, что тогда, когда f будетѣ означать уголѣ тренія, могущій заставить какую нибудь часть веревки скользить, и когда эта веревка будетѣ прилегать кѣ валу всѣми точками, нашли, говорю я, вѣ такомѣ случаѣ $лог. \frac{P}{T} = \frac{s - a}{R\ танг. f}$, гдѣ P означаетѣ силу, натягивающую веревку вѣ точкѣ прикосновенія ея кѣ валу; T силу, натягивающую веревку во всякой другой точкѣ лежащей на валу; и наконецѣ $s - a$ часть веревки, заключающуюся между сими двумя точками.

И такѣ допустимѣ, что веревка $pABCq$ (*фиг.* 178) такого же діаметра, какой мы принимали вѣ предыдущемѣ примѣрѣ, обхватываетѣ валѣ извѣстнаго радіуса, и что на одномѣ ея концу повѣшена извѣстная тяжесть q, а другой стали попеременно обременять даже до того, пока вѣсѣ p не придетѣ вѣ состояніе заставить веревку скользить по валу; послѣ чего представивѣ чрезѣ b длину обхватывающей части ABC, чрезѣ r радіусѣ вала, включая туда же и діаметрѣ веревки, будемѣ имѣть $лог. \frac{q}{p} =$ . .

$\frac{b}{r\ \text{танг.}\ f}$, и заключимъ, что *танг.* $f = \frac{b}{r\ \text{лог.}\ \frac{q}{p}}$.

Опредѣливши такимъ образомъ на самомъ опытѣ величину *танг* f, поступай въ каждомъ случаѣ при вычисленіи величины T такъ точно, какъ было показано въ предыдущемъ примѣрѣ.

О Жесткости веревокъ.

813. Жесткость веревокъ или та трудность, которую находимъ, сгибая ихъ по данной кривизнѣ, есть также одна изъ причинъ, уменьшающихъ дѣйствіе сообщаемыхъ машинамъ силъ.

Дабы понять, какимъ образомъ жесткость веревокъ бываетъ вредна въ дѣйствіяхъ силъ, то допустимъ, что блоковое колесо ABC (*фиг.* 179) вертится на оси R безъ всякаго тренія; и слѣд. при равныхъ вѣсахъ P и Q, движеніе тотчасъ должно послѣдовать, какъ скоро одинъ изъ нихъ будетъ увеличенъ, на примѣръ Q; но оно должно

послѣдовать тогда только, когда веревка PABCQ будетъ имѣть совершенную гибкость. Ибо въ противномъ случаѣ когда веревка не будетъ имѣть никакой гибкости, и которой части, положимъ, были бы тверды и крѣпко прилегали къ блоку; то не трудно примѣтить, что при движеніи блока по ABC, двѣ тяжести P и Q должны притти въ положеніе P′ и Q′, и слѣдовательно будутъ силиться возвратиться въ прежнее положеніе, такъ что для удержанія ихъ въ ономъ надобно употребить особливую силу. Естьли же веревка не будетъ ни совершенно негибка, ни совершенно гибка, то явствуетъ, что отъ недостатка совершенной гибкости произойдетъ, что при переходѣ точки A въ A′ (*фиг.* 180), а точки C въ C′, части AP, CQ нѣсколько скорчатся, и тяжесть P будетъ далѣе отъ R, а тяжесть Q ближе, чего не должно бы вытти при совершенной гибкости; и чтобъ привести части A′O, CC′ въ касательныя линеи къ точкамъ A и C, надобно силу, стремящую вертѣть, увеличить; словомъ, надобно употребить такую силу, которая бы совсѣмъ не нужна была безъ недостатка въ гибкости.

814. Не оставляя допускать блокъ совершенно подвижнымъ на оси R, естьли вмѣсто вере-

вки употребимъ ленту, то при малѣйшемъ усугубленіи вѣса Q, блокъ начнетъ вертѣться; но для веревки надобно этотъ вѣсъ Q гораздо больше увеличить и тѣмъ больше, ю чѣмъ сумма обоихъ вѣсовъ P и Q или вообще цѣлое обремененіе веревки будетъ больше; потому что при всѣхъ равныхъ вещахъ сопротивленіе, во время какъ тяжести P и Q по причинѣ жесткости веревки принимаютъ положенія A′OP′, CC′Q′, увеличивается соразмѣрно симъ тяжестямъ.

2е. Прибавленіе, которое нужно дать вѣсу Q, увеличивается также тѣмъ болѣе, чѣмъ радіусъ блока или вообще какой нибудь поверхности, обхватываемой веревкою, будетъ меньше. Ибо не трудно примѣтить, что затрудненіе для силы происходитъ большею частію отъ того, что веревка не прилегаетъ плотно къ поверхности во время обращенія ея, но отходитъ отъ нее нѣсколько, дѣлая излучину P′OA′, которая составляетъ съ самою поверхностью нѣкоторой уголъ OA′A; это затрудненіе становится тѣмъ больше, чѣмъ излучина A′O веревки, происходящая отъ недостатка въ гибкости, будетъ менѣе сходствовать съ кривизною поверхности; но чѣмъ менѣе будетъ радіусъ поверхности, тѣмъ болѣе будетъ несходства въ оныхъ кривизнахъ.

3е. Силѣ еще должно увеличиться по мѣрѣ величины діаметра веревки; ибо натурально толстая веревка не такъ удобно сгибается. Но мы теперь только замѣтили, что сила тѣмъ болѣе встрѣчаетъ сопротивленія, чѣмъ болѣе несходства въ кривизнахъ A′O и A′A; она его встрѣтитъ тѣмъ больше, чѣмъ A′O будетъ меньше отходить отъ прямой линеи, а это не отъ инаго чего можетъ произойти, какъ отъ величины радіуса или діаметра веревки.

815. Положимъ, что k означаетъ то, что нужно прибавить къ силѣ для преодолѣнія сопротивленія, происходящаго отъ жесткости веревокъ, когда вся сила, натягивающая веревку будетъ изображена чрезъ P, діаметръ веревки чрезъ D, а радіусъ поверхности ABC чрезъ R. Теперь желая знать, каково должно быть прибавленіе силы при тяжести p, діаметрѣ веревки d и при радіусѣ поверхности r, замѣтимъ изъ предыдущаго, что естьли бы кромѣ разности одного вѣса натягивающаго веревку не было ничего другаго; то это прибавленіе должно опредѣлиться по пропорціи $P : p = k$ къ четвертому члену, которой будетъ $\frac{pk}{P}$. Но естьли кромѣ разности въ вѣсу случится несходство и въ

кривизнахъ поверхностей, то (по второму замѣчанію, показывающему, что прибавленія, происходящія отъ сей причины, находятся въ обратномъ содержаніи съ радіусами поверхностей) прибавленіе, обращая вниманіе какъ на эту причину, такъ и на перемѣну вѣса, опредѣлится четвертымъ членомъ по пропорціи $r : R = \frac{pk}{P}$, и будетъ состоять изъ $\frac{pRk}{Pr}$. Наконецъ опредѣляя его по третьему замѣчанію съ отнесеніемъ къ нему двухъ предыдущихъ причинъ, должно найти четвертой членъ въ слѣдующей пропорціи $D : d = \frac{pRk}{Pr}$ къ четвертому члену, которой будетъ $= \frac{pRkd}{PrD}$. Такимъ образомъ сопротивленіе въ первомъ случаѣ будетъ содержаться къ сопротивленію во второмъ $= k : \frac{pRkd}{PrD}$, или $= PrD : pRd$, или $= \frac{PD}{R} : \frac{pd}{r}$; то есть, сопротивленія, происходящія отъ жесткости веревокъ, содержатся пропорціонально вѣсамъ, которые натягиваютъ ихъ, умноженнымъ на діаметры тѣхъ же веревокъ и раздѣленнымъ на радіусы поверхностей.

Впрочемъ хотя заключенія сіи не во всей строгости точны; но пока опытъ не объяснитъ больше этой матеріи, можно почитать ихъ достаточными на практикѣ. Опытъ показываетъ въ самомъ дѣлѣ, что сопротивленіе, происходящее отъ жесткости веревокъ, подчиняется сему закону; однакожъ всѣ опыты чинимые доселѣ въ разсужденіи этой матеріи мало были согласны, и потому надобно всегда стараться дѣлать веревки мягче и гибче. *Смотри* превосходной *трактатъ о веревкахъ* Гна. дю Гамеля.

О Способѣ исчислять силы, передаваемыя машинамъ.

816. Мы уже упоминали нѣсколько разъ, что мѣра всякой силы состоитъ изъ произведенія опредѣленной массы умноженной на скорость, какую сообщаетъ сила той массѣ. А теперь за приличное почитаемъ присовокупить здѣсь нѣкоторыя обьясненія на употребленіе сего правила для мѣры силъ, передаваемыхъ машинамъ.

Когда двѣ тяжести дѣйствуютъ взаимно одна на другую посредствомъ простаго и неподвижнаго блока; то должно для равновѣсія массамъ ихъ, какъ мы то уже замѣ-

тили, быть совершенно равнымъ; и равновѣсіе такое можетъ продолжаться вѣчно.

Но ежели вмѣсто тяжести противуположена будетъ сила животнаго или человѣка; то хотя нѣтъ нималаго сомнѣнія, что для равновѣсія сей человѣкъ не болѣе долженъ употребить усилія, какъ соразмѣрно поддерживаемому имъ вѣсу, то есть, долженъ употребить силу равную количеству движенія, которое происходитъ изъ умноженія массы на скорость, какую тяжесть сообщаетъ ей въ одно мгновеніе; однакожъ не меньше справедливо, что ежели человѣкъ способенъ будетъ оказать только это усиліе, то равновѣсіе продолжится не болѣе какъ на одно мгновеніе, потому что тяжесть возобновитъ во второе мгновеніе дѣйствіе свое, которое изтреблено было въ первое,

И такъ не по одной массѣ, поддерживаемой человѣкомъ, должно судить о его силѣ; но надобно еще включить въ мѣру этой силы то, сколько разъ онъ способенъ противуположить дѣйствіе равное дѣйствію тяжести, раждаемому въ каждое мгновеніе. Естьли представимъ чрезъ *p* скорость, которую сообщаетъ тяжесть въ секунду

времени свободному тѣлу, а чрезъ dt безконечно малую часть какого нибудь времени t, то pdt будетъ означать (173) скорость, сообщаемую тяжестью въ мгновеніе dt, щитая t секундами. Теперь предположивъ M массою, которую нужно поддержать, получимъ въ $Mpdt$ вѣсъ ея или количество движенія, сообщаемое ей тяжестью въ каждое мгновеніе dt; оно же будетъ означать и то дѣйствіе, какое сила, поддерживающая массу M непосредственно или блокомъ, должна оказывать въ каждое мгновеніе. И такъ въ какое нибудь время t эта сила должна истребить количество движенія равное $\int Mpdt$, то есть, $= Mpt$. Слѣд. естьли t будетъ означать время, по истеченіи котораго дѣйствующая сила не въ состояніи поддерживать массу M, то можно почитать Mpt за мѣру ея. Здѣсь надобно замѣтить, что мы не разумѣемъ подъ этимъ, чтобъ сила не способна была производить болѣе никакого дѣйствія, но что она становится слабѣе сопротивленія, и слѣд. въ такомъ случаѣ должно почитать ее за ничто.

На примѣръ положимъ, что для удержанія тяжести въ 50 фунтовъ на часъ времени хотѣли бы употребить извѣстную силу, которая дѣйствуя по равнымъ и безконечно

малымЪ степенямЪ можетЪ произвести вЪ массѣ 20 фунтовЪ скорость по 50 футовЪ на секунду: вЪ такомЪ случаѣ не трудно примѣтить, что количество движенія массы вЪ 20 фунтовЪ должно равняться 20 фунт. $\times$ 50 = 1000. Посмотримъ же теперь, будетЪ ли это количество движенія равняться количеству Mpt, здѣлавЪ вставку 50 фунтамЪ вмѣсто M, 1 часу или 3600 секундамЪ вмѣсто t и 30, 2 футамЪ (172) вмѣсто p; но мы находимЪ, что она гораздо меньше, слѣд. такая сила не можетЪ удержать тяжести 50 фунтовЪ вЪ продолженіи часу времени. Но естьли потребуется узнать, на какое время или на какое число секундЪ она его удержитЪ; то должно для сего предположить $Mpt = 1000$, и потомЪ вставивЪ 50 вмѣсто M, а 30,2 футовЪ вмѣсто p, получимЪ

$$t = \text{близу } \frac{1000}{50\times30{,}2} = \frac{1000}{1510} = \frac{100}{151} = \frac{2'}{3};$$

а это показываетЪ, что такая сила не болѣе можетЪ удерживать тяжесть 50 фунтовЪ, какЪ около $\frac{2}{3}$ секунды.

817. ПоложимЪ теперь, что надобно опредѣлить силу не только для удержанія массы M во время t, но и еще такую, которая бы двигала ее вЪ это время сЪ одинаковою скоростью u.

Явствуетъ, что дѣйствующая сила для произведенія въ движимомъ M вдругъ или не вдругъ скорости u, должна истощать количество движенія $= Mu$; а для сохраненія этой скорости u во время t надобно ей во все продолженіе онаго сражаться съ тяжестію такъ, какъ бы тѣло было въ покоѣ; то есть, надобно ей (816) истощить сверхъ того количество движенія $= Mpt$. Слѣд. для удержанія движимаго M со скоростью u въ продолженіе времени t, надобно, чтобъ дѣйствующая сила была способна произвести количество движенія $= Mu + Mpt$.

818. Опытомъ дознано, что человѣкъ приставленъ будучи къ такому вороту, какой изображенъ *фигурою* 121, можетъ дѣйствовать въ продолженіи 8 часовъ, поворачивая его въ минуту 30 разъ, по предположеніи 1е что радіусъ вала и рукоятки Q равны, и каждый въ 14 дюймовъ; и 2е. что тяжесть, держащаяся на поверхности ворота, въ 25 фунтовъ. Сей опытъ опредѣляетъ величину $Mu + Mpt$ и слѣд. то, выше чего не должно исчислять силу человѣческую въ извѣстное время. Въ самомъ дѣлѣ по допущеніи радіусовъ вала и рукоятки равными, тяжесть должна совершать здѣсь одинакой путь съ силою. А какъ мы принимаемъ этотъ

радіусЪ вЪ 14 дюймовЪ, то при каждомЪ оборотѣ ворота, сила пробѣгаетЪ $28 \times \frac{22}{7}$ или 88 дюймовЪ; наконецЪ поелику эта сила дѣлаетЪ вЪ минуту 30 оборотовЪ, то она вЪ секунду времени опишетЪ 44 дюйма или $\frac{44}{12}$ фута; то есть, скорость $u = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$; масса $M = 25$ фунт., $p = 30$ф,2 и $t = 8$ час. $= 28800''$. По вставкѣ сихЪ величинЪ вЪ $Mu + Mpt$, получимЪ $Mu + Mpt = \frac{275}{3} + 21744000 = 21744092$. ВотЪ то число, по которому должно судить о силѣ человѣка вЪ предлагаемой ему работѣ.

На примѣрЪ желая знать, можетЪ ли работникЪ, приставленный кЪ той же машинѣ сЪ тяжестью 60 фунт. дѣйствовать ею вЪ продолженіи 6 часовЪ сЪ 10 футовою скоростью вЪ секунду? найдемЪ тотчасЪ, что отнюдь нѣтЪ. Ибо вЪ настоящемЪ случаѣ будемЪ имѣть $M = 60$ фунтамЪ; $u = 10$; $p = 30,2$; $t = 21600''$; но это выведетЪ $Mu + Mpt = 600 + 39139200 = 39139800$ число, которое весьма многимЪ превосходитЪ 21744092, и слѣд. показываетЪ, что человѣкЪ работая безЪ отдыху 6 часовЪ, не способенЪ оказать такой силы.

819. Мы нигдѣ вЪ предыдущей выкладкѣ не допускали тренія. Но какЪ дѣйствіе машинЪ должно разсматривать тогда, когда онѣ достигаютЪ единообразнаго ходу; и потому дѣйствіе тренія будетЪ вЪ такомЪ случаѣ количество постоянное, которое мож-

но сравнить съ какою нибудь массою, движущеюся вмѣстѣ съ данною. Такъ на примѣръ въ предыдущемъ случаѣ положивъ треніе равнымъ тяжести извѣстной части $\frac{n}{m}$ массы M, найдемъ, что это сопротивленіе потребуетъ со стороны силы количества движенія $=$ $\frac{n}{m}$ Mpt; такимъ образомъ Mu $+$ $\frac{n}{m}$ Mpt $+$ Mpt, или Mu $+$ $\left(\frac{n}{m} + 1\right)$ Mpt будетъ мѣрою движущей силы.

Хотя Авторъ (Дезагильеръ *въ Курсѣ опытной Физики, Томъ II стр. 594*) въ предложенномъ опытѣ не говоритъ ни слова о дѣйствіи тренія, однако надобно думать, что онъ помѣщаетъ его въ заключеніи.

И такъ по допущеніи, что при радіусѣ оси гораздо меньшемъ радіуса вала, треніе состоитъ изъ 12 доли тяжести, должно опустить членъ Mu, и увеличить число 2174000 двенадцатою его частію; и слѣд. въ подобныхъ обстоятельствахъ сила человѣческая должна изобразиться числомъ 2355600. Отсюда явствуетъ, что для вѣрнаго вычисленія силы человѣческой, надобно напередъ

опредѣлить содержаніе силы тренія къ силѣ поднимаемой тяжести. Тогда, ежели k будетъ по опыту величиною $\left(\frac{n}{m}+1\right)Mpt$,

получимъ $\left(\frac{n}{m}+1\right)Mpt=k$, по опущеніи члена Mu, когда u будетъ меньше pt. Это уравненіе будетъ служить при всякой другой величинѣ $\frac{n}{m}$ къ опредѣленію силы человѣческой, потребной на движеніе или поднятіе тяжести M во время t. Такимъ же образомъ должно разсуждать о силѣ лошади или всякаго другаго животнаго. Полагаютъ, что лошадь въ продолженіи многихъ часовъ можетъ работать за семь человѣкъ; такимъ образомъ исщисляя силу человѣческую 25 фунтами, силу лошади опредѣлимъ во 175 фунтахъ.

820. Вездѣ въ предыдущемъ мы принимали силу дѣйствующею не посредственно на тяжесть и такою, которая не получаетъ никакой помощи со стороны мѣстныхъ обстоятельствъ или машинъ. Однако много есть такихъ обстоятельствъ, гдѣ можно щитать, что дѣйствіе выходитъ гораздо больше на самомъ дѣлѣ, чѣмъ по показаннымъ выкладкамъ. На примѣръ, человѣкъ

дѣйствуя блокомъ, можетъ присовокупить къ силѣ своей тяжесть своего тѣла или большую часть его. Много другихъ обстоятельствъ и машинъ, гдѣ онъ сверхъ собственной своей силы находитъ еще помощь и въ посторонней. Не рѣдко случается, что движеніе бываетъ прерывисто, на примѣръ въ блокахъ, и отнимаетъ время; но эта потеря времени полезна, ибо она даетъ отдыхъ работнику, которой укрѣпясь силами работаетъ долѣе съ одинакимъ дѣйствіемъ. Однако мы не остановимся ни сихъ подробностяхъ, ибо всякой сообразуясь съ смысломъ изъясненнаго нами и съ опытомъ, можетъ удобно самъ здѣлать заключенія.

821. Хотя мы разсматривали одинъ только случай полагаемаго тяжестью сопротивленія силѣ, однако не трудно по изъясненнымъ теперь правиламъ на содержаніе тяжести къ силѣ во всякой машинѣ, опредѣлить, можетъ ли данная сила посредствомъ такой-то или другой машины произвести желаемое дѣйствіе. На примѣръ для поднятія вѣсу воротомъ со скоростью u, въ которомъ за радіусъ вала положимъ r, а за радіусъ колеса R, надобно силѣ употребить количество движенія $\frac{Mur}{R}$; а поелику дѣйствіе тяжести

передаетъ во время t тѣлу M количество движенія Mpt, то силѣ должно употребить на одолѣніе сего сопротивленія количество движенія $\frac{Mptr}{R}$; наконецъ допустивъ треніе равнымъ $\frac{n}{m}$ части массы M, держащейся на разстояніи r, найдемъ, что сила должна употребить количество движенія $\frac{n}{m} \frac{Mptr}{R}$. Такимъ образомъ желая узнать, способна ли сила двигать или поднимать массу M со скоростью u во время t воротомъ, котораго радіусъ вала r, а колеса R, надобно на опытѣ опредѣлить величину $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right) \frac{Mptr}{R}$, присовокупляя къ вороту извѣстной мѣры и тренія силу, долженствующую двигать извѣстную массу, наблюдая при томъ сколько времени эта сила можетъ продолжать свое дѣйствіе; тогда естьли по вставкѣ вмѣсто M, u, r, R, $\frac{n}{m}$ и t величинъ сихъ количествъ опредѣленныхъ на самомъ опытѣ, выдетъ k величиною $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right) \times$

$\frac{Mptr}{R}$, то это выраженіе и во всякомЪ другомЪ случаѢ не должно быть больше k.

822. ТакимЪ же образомЪ должно поступать и для наклоненной плоскости, по которой сила влечетЪ массу со скоростью u; естьли представимЪ чрезЪ i склоненіе плоскости, то вЪ Mpt *син.* i получимЪ (426) количество движенія, которое сообщитЪ тяжесть движимому по направленію плоскости во время t; и слѣд. силѢ надобно употребить количество движенія $= Mu + Mpt$ *син.* i; когда же при томЪ треніе будетЪ состоять изЪ части $\frac{n}{m}$ влекомаго бремени, то ей должно употребить количество движенія $= Mu + Mpt$ *син.* $i + \frac{n}{m} Mpt$. Слѣд. опредѢливЪ на самомЪ опытѢ величину $Mu + Mpt$ *син.* $i + \frac{n}{m} Mpt$, надобно потомЪ, естьли пожелаешь узнать, способна ли будетЪ таже сила двигать опредѢленную массу M сЪ данною скоростью u, и вЪ данное время t на плоскости, которой склоненіе равно i, а треніе состоитЪ изЪ извѢстной части тяжести M, надобно, говорю я, изслѢдовать, будетЪ

ли выведенная такимъ образомъ величина $Mu + Mpt$ *син.* $i + \frac{n}{m} Mpt$ меньше, или по крайней мѣрѣ равна извѣданной на опытѣ; и тогда заключай, что дѣло будетъ въ обоихъ случаяхъ возможно.

Ежели вмѣсто времени t, въ продолженіе котораго дѣйствуетъ машина, будетъ дано пространство пробѣгаемое силою или массою, на примѣръ пространство пробѣгаемое массою со скоростью u; то, поелику движеніе предполагается однообразнымъ, означь чрезъ E оное пространство и вставь въ формулѣ, вмѣсто t величину его $\frac{E}{u}$ (156).

Вотъ способъ, которому должно держаться при вычисленіи силъ употребляемыхъ къ машинамъ. Хотя же по справедливости для каждой машины надобно обращать особливое вниманіе какъ относительно къ натурѣ дѣйствующей силы, такъ и къ образу употребленія ея; но какъ все это зависитъ отъ количества движенія, которое истощеваетъ сила, то преподанныя правила во всѣхъ изысканіяхъ могутъ руководствовать насъ надежно.



ПРИБАВЛЕНІЕ,

Вѣ которомѣ подробнѣе изъясняется о движеніи бросаемыхѣ тѣлѣ вѣ противящейся серединѣ.

823. Мы показали (501 и слѣд.) первый опытѣ способа опредѣлять кривую линею, которую описываютѣ бросаемыя тѣла вѣ противящейся серединѣ; теперь остается намѣ по обѣщанію своему здѣлать кѣ оному дополненіе, и именно вывести уравненіе сѣ большею вѣрностью и обратить вниманіе на перемѣну густоты воздуха. Но прежде нежели приступимѣ кѣ изслѣдованію того и другаго предмета, мы за нужное почитаемѣ дать яснѣйшее понятіе, чѣмѣ (515 и слѣд.), о настоящемѣ дѣйствіи перваго приближенія на выстрѣлы.

824. Мы видѣли (517), что по приняшіи одной только части перемѣнною величины dx, первое это приближеніе должно вывести выстрѣлы короче; но мы замѣтили также, что постоянное, которое нужно при-

бавить къ интегралу, зависся само отъ приближенія, служило большею частію къ вознагражденію ущерба, происходящаго отъ приближенія, и слѣд. уравненіе выводило даже для самыхъ большихъ угловъ метанія выстрѣлы съ довольною вѣрностію.

Настоящее дѣйствіе сего постояннаго не только дополняетъ то, чѣмъ здѣланное нами предположеніе учиняетъ выстрѣлы короче, но и еще выводитъ ихъ нѣсколько больше противу должныхъ; и вотъ какъ можно въ этомъ увѣриться.

Возвратимся къ уравненію $\frac{2px}{k^2} = \frac{1}{a}$

$$лог. \frac{C - \frac{2az}{1 - zz}}{C - a\ танг.\ I}$$

, которое выходитъ изъ интеграціи (520).

Хотя при весьма быстрыхъ скоростяхъ количество C должно быть очень малое, однакожъ всегда больше, чѣмъ *а танг.* I, и слѣд. тѣмъ паче больше, чѣмъ $\frac{2az}{1 - zz}$ въ опускающейся къ низу отрасли, потому что

$\frac{2z}{1 - zz}$ меньше *танг.* I. Слѣд. можно (87) допустить *лог.* $\left(C - \frac{2az}{1 - zz}\right) = - \frac{a}{C} \times \frac{2z}{1 - zz} - \frac{aa}{2CC} \times \frac{4z^2}{(1-zz)^2}$ и проч., а *лог.* $(C - a$ *танг.* $I) = \frac{a}{C}$ *танг.* $I - \frac{aa}{2CC} \times$ *танг*^{2}. I и проч. Слѣд. $\frac{1}{a}$ *лог.* $\frac{C - \frac{2az}{1 - zz}}{C - a \text{ танг.} I} = \frac{2px}{k^2} = \frac{1}{C}$ (*танг.* $I - \frac{2z}{1 - zz}) + \frac{a}{2CC}$ (*танг*^{2}. $I - \frac{4z^2}{(1 - zz)^2}$) + и проч. А поелику *а* по положенію должно сохранять начальную свою величину во всей поднимающейся къ верху отрасли, то это предположеніе дѣлаетъ величину *а* больше настоящей, и слѣд. выводитъ амплитуду для этой отрасли также больше.

Равномѣрно докажемъ, что выстрѣлъ прибавляется отъ точки самаго большаго возвышенія до той, гдѣ опускающаяся отрасль дѣлаетъ съ горизонтомъ уголъ равный углу метанія, а потомъ онъ уменьшается.

825. Однако не должно думать, чтобъ происходящая отъ того ошибка была очень велика. Между симъ и вторымъ способомъ, которой мы намѣрены показать, и котораго выкладка укорачиваетъ выстрѣлы, хотя и находится разность, но она начинаетъ ощутительна быть при весьма большихъ скоростяхъ.

При скоростяхъ метанія, какія означены въ ниже приложенныхъ пробахъ съ бомбами, то есть, при начальныхъ скоростяхъ отъ 400 до 500 футовъ на секунду, оба способа не болѣе разнятся; какъ на 6 футовъ въ самомъ большомъ выстрѣлѣ; но при самыхъ большихъ выстрѣлахъ эта разность и должна бы быть ощутительна.

Что касается до начальныхъ скоростей отъ 1400 до 1500 футовъ на секунду, которыя превосходятъ и тѣ, какія допускаются въ нижеприложенныхъ пробахъ съ 24 фунтовыми ядрами по заряду пороха въ $8\frac{1}{2}$ фунтовъ самому сильнѣйшему, то и тутъ разность между обоими способами въ самыхъ большихъ выстрѣлахъ не далѣе простирается, какъ до 100 туазовъ; а какъ одинъ изъ нихъ выводитъ результатъ слишкомъ великъ, а другой слишкомъ малъ, то сред-

нюю погрѣшность должно полагать въ 50 или 60 туазовъ. Отсюда явствуетъ, что при самыхъ большихъ скоростяхъ погрѣшность выходящая изъ обоихъ способовъ, ниже всякой той, какія неизбѣжны на практикѣ.

826. Поелику второй способъ исчисленія выстрѣловъ гораздо труднѣе перваго, и притомъ вѣрность приближенія его не такъ достаточна; то можно, не опасаясь подвергнуться большой погрѣшности, держаться перваго въ выкладкѣ ниже приложенныхъ пробъ.

Но можно здѣлать выкладку сего перваго способа еще вѣрнѣе, когда порознь исчислишь какъ поднимающуюся, такъ и опускающуюся отрасль кривой линеи. Ибо изъ разсужденія, которымъ доказали мы, что первой способъ выводитъ цѣлые выстрѣлы слишкомъ велики, не трудно примѣтить, что ежели по особенномъ исчисленіи какъ восходящей, такъ и опускающейся отрасли, выдетъ для первой амплитуда нѣсколько велика, то въ замѣну того для второй она будетъ нѣсколько мала; и слѣд. результатъ будетъ весьма близко подходить къ результату втораго способа приближенія, до котораго достигнуть не такъ-то легко.

И этотъ-то способъ употребили мы для вычисленія ядерныхъ выстрѣловъ, обращая вниманіе на измѣненіе густоты воздуха.

827. Кажется весьма трудно найти прямой способъ приближенія для дѣйствія густоты на тѣ случаи, когда 24 фунтовое ядро, будучи брошено подъ самымъ большимъ угломъ, поднимается на самую большую высоту. Но за недостаткомъ сего можно употребить другія не прямыя, однако довольно вѣрныя для настоящаго предмета.

И такъ то, что будетъ относиться до перемѣны густоты воздуха, будемъ трактовать по первому способу приближенія; но для большей вѣрности употребляя особливую выкладку какъ для поднимающейся, такъ и для опускающейся отрасли. По томъ мы покажемъ второй способъ приближенія, которой еще вѣрнѣе опредѣлитъ кривую линею по допущеніи густоты постоянною; мы также покажемъ, какъ въ этомъ второмъ приближеніи обращать вниманіе и на перемѣну густоты, и такимъ образомъ дойдемъ до весьма тѣсныхъ предѣловъ величины выстрѣловъ.

828. И такъ поворотимся къ начальному уравненію $\frac{2pdx}{k^2} = -$ . . . . .

$$\frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} - \frac{1}{2}\,лог.\,\frac{1+z}{1-z}}$$, найденному (506).

Означимъ чрезъ H уголъ кривой линеи съ горизонтомъ въ какой нибудь точкѣ, и мы получимъ $\frac{2z}{1-zz} = тан.\,H$, и $z = танг.\,\frac{1}{2}H$.

При томъ же $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} = \frac{2z}{1-zz} \times \frac{1}{2}\,\frac{1+zz}{1-zz}$

$= \frac{1}{2}\,танг.\,H \times \frac{1+танг^2.\,\frac{1}{2}H}{1-танг^2.\,\frac{1}{2}H} = \frac{1}{2}\,танг.\,H \times$

$\frac{кос^2.\,\frac{1}{2}H + син^2.\,\frac{1}{2}H}{кос^2.\,\frac{1}{2}H - син^2.\,\frac{1}{2}H} = \frac{1}{2}\,танг.\,H$ . . .

$\frac{1}{кос^2.\,\frac{1}{2}H - син^2.\,\frac{1}{2}H}$; но (*Геом.* 287) $кос^2.\,\frac{1}{2}H$

$- син^2.\,\frac{1}{2}H = кос.\,H$; слѣд. $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{танг.\,H}{кос.\,H} = \frac{1}{2}\,танг.\,H\,сек.\,H.$

Съ другой же стороны $лог. \frac{1+z}{1-z} = лог.$ $\frac{1 + танг. \frac{1}{2} H}{1 - танг. \frac{1}{2} H} = лог. танг. (45^\circ + {}^1 H)$.

Въ сходственность сего уравненіе кривой линей превращается въ $\frac{2pdx}{k^2} = \ldots$

$$\frac{- d\ танг.\ H}{C - \frac{1}{2} танг. H\ сек. H - \frac{1}{2} лог. танг. (45^\circ + \frac{1}{2} H)},$$

или въ $\frac{2pdx}{k^2} = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{- d\ танг.\ H}{C - танг. H [\frac{1}{2} сек. H + \frac{1}{2} кот. H\ лог. танг. (45^\circ + \frac{1}{2} H)]}.$$

И такъ количество $\frac{1}{2}$ *сек.* H $+$ $\frac{1}{2}$ *кот.* H *лог. танг.* (45° $+$ $\frac{1}{2}$ H) есть то, что мы принимали за *a* въ выкладкѣ (519 и слѣд.), и которое допускали мы постояннымъ и равнымъ начальной своей величинѣ. Хотя же въ самомъ дѣлѣ это количество и непостоянное, но погрѣшность, происходящая отъ такого предположенія, бываетъ мала, какъ мы уже то сказали, и что еще можно замѣтить, обративъ вниманіе, что при чрезмѣрно великой скорости: 1е уголъ H не прежде начинаетъ измѣняться чувствительно, какъ уже

по описаніи большой части своего пути. 2е. Что погрѣшность, могущая произойти въ разсужденіи величины dx, не совсѣмъ пропорціональна измѣненію a, но что она до нѣкотораго предѣла увеличивается, потомъ уменьшается и такъ сказать потасаетъ, потомъ опять возобновляется и опять уменьшается даже до уничтоженія своего; наконецъ начинаетъ опять возрастать въ послѣдней части второй отрасли, производя на выстрѣлы противное дѣйствіе. Всѣ эти заключенія не трудно вывести, сравнивъ уравненіе $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\,танг.\,H}{C - a\,танг.\,H}$

съ уравненіемъ $\frac{2pdx}{k^2} = \ldots\ldots$

$$\frac{-d\,танг.\,H}{C - танг.\,H[\frac{1}{2}сек.\,H + кот.\,H\,лог.\,танг.(45^\circ + \frac{1}{2}H)]}$$

и замѣтивъ, что оба онѣ имѣютъ одинакую величину при слѣдующихъ трехъ точкахъ, то есть, при точкѣ вылета ядра, на самомъ большомъ его возвышеніи, и при точкѣ второй отрасли, имѣющей одинакой уголъ съ угломъ метанія.

329. Когда же густота будетъ постоянная, то выведенное уравненіе можно изобразить

довольно близко слѣдующимъ $\frac{2pdx}{k^2} = \ldots$

$\frac{-d\ \text{танг.}\ H}{C - a\ \text{танг.}\ H}$, въ которомъ $a = \frac{1}{2}$ *сек.* I $+$ $\frac{1}{2}$ *кот.* I *лог. танг.* $(45^\circ + \frac{1}{2}\text{I})$, здѣсь I означаетъ уголъ метанія.

830. А чтобъ здѣлать его способнымъ изображать кривую линею по принятіи густоты перемѣнною, то должно допустить, что оно удерживаетъ тотъ же видъ, но разнится отъ предыдущаго одними только постоянными; то есть, должно вмѣсто $dx =$

$\frac{\frac{k^2}{2p} \times -d\ \text{танг.}\ H}{C - a\ \text{танг.}\ H}$ допустить $dx = \ldots$

$\frac{-d\ \text{танг.}\ H}{A - B\ \text{танг.}\ H}$. Такое допущеніе тѣмъ позволительнѣе, что перемѣна густоты не такъ велика; и слѣд. уравненія по предположеніи густоты постоянною и такою, которая измѣняется мало, должны не много разниться между собою. Представляю $\frac{2p}{k^2}$ чрезъ 2D; послѣ чего генеральное уравненіе

обращается въ $dx = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{-\frac{1}{2D} \times d\ \textit{танг.}\ H}{C - \textit{танг.}\,H\left[\frac{1}{2}\textit{сек.}\,H + \frac{1}{2}\textit{кот.}\,H\,\textit{лог.танг.}(45^\circ + \frac{1}{2}H)\right]}.$$

Опредѣляю A и B по двумъ слѣдующимъ условіямъ: 1е чтобъ при вылетѣ ядра густота или количество 2D ему пропорціональное, равнялось извѣстной величинѣ, какую она должна имѣть при той точкѣ. 2е. Чтобъ при верху кривой линеи, гдѣ $H = o$, густота или количество 2D ему пропорціональное, равнялось такой величинѣ, какую она должна имѣть при этой точкѣ, и величину сію представляю чрезъ 2D′.

Въ сходственность сего получаю два такія уравненія: первое $\frac{-d\ \textit{танг.}\ H}{A - B\ \textit{танг.}\ I} =$

$$\frac{-\frac{1}{2D} \times d(\textit{танг.}\ H)}{C - a\ \textit{танг.}\ I}$$, потому что $a = \frac{1}{2}$ *сек.* $I + \frac{1}{2}$ *кот.* I *лог. танг.* $(45^\circ + \frac{1}{2} I)$, и другое $\frac{-d\ \textit{танг.}\ H}{A} = -\frac{1}{2D'} \cdot \frac{d\ \textit{танг.}\ H}{C}$. По этимъ

двумъ уравненіямъ вывожу А $= 2CD'$, и В $= 2Da - \frac{2C(D - D')}{\text{танг.} I}$.

Опредѣливъ такимъ образомъ величины А и В, получу $dx = \frac{-d \text{ танг.} H}{A - B \text{ танг.} H}$, и слѣд. $x = C' + \frac{1}{B}$ лог. $(A - B \text{ танг.} H)$, то есть, $x = \frac{1}{B}$ лог. $\frac{A - B \text{ танг.} H}{A - B \text{ танг.} I}$, опредѣливши постоянное C' по условію, что $x = o$, когда $H = I$, какъ тому и должно быть.

А поелику ничто не изображаетъ въ этомъ уравненіи измѣненія густоты въ опускающейся къ низу отрасли, то и не должно употреблять его къ опредѣленію амплитуды сей отрасли. Почему ежели здѣлавъ танг. $H = o$, представимъ чрезъ X амплитуду сей отрасли, то получимъ $X = \frac{1}{B}$ лог. . .

$\frac{A}{A - B \text{ танг.} I}$; а какъ $A - B$ танг. $I = 2D$ $(C - a \text{ танг.} I)$, и (520) $C - a$ танг. $I =$

$\frac{k^2}{4ph\ кос^2.\ I} = \frac{1}{4Dh\ кос^2.\ I}$, то будемъ наконецъ

имѣть $X = \frac{1}{B}\ лог.\ 2Ah\ кос^2.\ I.$

831. Прежде вычисленія амплитуды нижней отрасли, опредѣлимъ величину самой большой ордонаты или самаго большаго возвышенія ядра. Но мы (503) вообще имѣемъ $\frac{dy}{dx} = танг.\ H$, или $dy = dx\ танг.\ H$; и слѣд. по причинѣ что $dx =$ $\frac{-\ d\ танг.\ H}{A - B\ танг.\ H}$, будемъ имѣть также $dy =$ $\frac{-\ танг.\ H.\ d(танг.\ H)}{A - B\ танг.\ H} = \frac{d\ танг.\ H}{B} - \frac{A}{B}$ $\frac{d\ танг.\ H}{A - B\ танг.\ H}$; слѣд. $y = C'' + \frac{танг\ H}{B}$ $+ \frac{A}{BB}\ лог.\ (A - B\ танг.\ H)$. А поелику y должно равняться нулю, когда $H = I$, то получимъ $y = \frac{танг.\ H - танг.\ I}{B} + \frac{A}{BB}\ лог.$ $\frac{A - B\ танг.\ H}{A - B\ танг.\ I}$;

И такъ здѣлавъ $H = o$ и представивъ чрезъ Y самую большую ордонату, выведемъ

$$Y = \frac{-\text{танг. } I}{B} + \frac{A}{BB}\,\text{лог.}\frac{A}{A - B\,\text{танг. } I};$$

то есть, $Y = \frac{-\text{танг. } I + AX}{B}$.

Приступимъ теперь къ вычисленію амплитуды опускающейся отрасли.

832. Для опредѣленія уравненія сей отрасли, воображаю, что ядро вылетаетъ изъ верху кривой линеи, какъ бы оно было пущено горизонтально со скоростью, какую оно дѣйствительно имѣетъ. И по тому уравненіе, изображенное вообще чрезъ $dx =$

$$\frac{-\frac{1}{2D}\;d\,\text{танг. } H}{C - \text{танг.}H[\frac{1}{2}\text{сек.}H + \text{кот.}H\,\text{лог.танг.}(45^\circ + \frac{1}{2}H)]}$$

превратится, потому что H есть количество отрицательное, въ $dx =$ . . . . . .

$$\frac{\frac{1}{2D'}\,d\,(\text{танг. } H)}{C' + \text{танг.}H[\frac{1}{2}\text{сек.}H + \text{кот.}H\,\text{лог.танг.}(45^\circ + \frac{1}{2}H)]},$$

гдѣ C′ означаетъ постоянное, приличное на-

чальной скорости метанія. Теперь допускаю по примѣру показаннаго выше, что это уравненіе можно изобразить чрезъ $dx = \ldots$ $\frac{d\ \text{танг.}\ H}{A' + B'\ \text{танг}\ H}$, и опредѣляю A′ и B′ по условію, чтобъ густота или количество $\frac{2p}{k^2}$ ей пропорціональное было равно 2D′ при верху, а 2D при точкѣ паденія.

И такъ представивъ чрезъ a' величину $\frac{1}{2}\ \text{сек.}\ H + \frac{1}{2}\ \text{кот.}\ H\ \text{лог. танг.}\ (45^\circ + \frac{1}{2} H)$ при точкѣ паденія, получаю для опредѣленія A′ и B′ два слѣдующія уравненія $\frac{\frac{1}{2D'}\ d\ \text{танг.}\ H}{C'}$ $= \frac{d\ \text{танг.}\ H}{A'}$, и $\frac{\frac{1}{2D}\ d\ (\text{танг.}\ H)}{C' + a'\ \text{танг.}\ I'} = \ldots$ $\frac{d\ \text{танг.}\ H}{A' + B'\ \text{танг.}\ I'}$, здѣсь I′ означаетъ уголъ паденія.

По этимъ двумъ уравненіямъ вывожу $A' = 2C'D'$, и $B' = 2Da' + \frac{2C'(D - D')}{\text{танг. } I'}$.

Определимъ C'.

Мы нашли (504) $\frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = C - \frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} - \frac{1}{2}\text{ лог. }\frac{1 + z}{1 - z}$; то есть, $\frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = C - \text{танг. } H\,[\frac{1}{2}\text{ сек. } H + \frac{1}{2}\text{ кот. } H \text{ лог. танг. } (45^\circ + \frac{1}{2} H)\,]$; а поелику по допущенію можно вмѣсто $\frac{1}{2D\,[C - \text{танг. } H(\frac{1}{2}\text{ сек. } H + \text{ и проч.})]}$ принять $\frac{1}{A - B\text{ танг. } H}$, то получимъ $\frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = \dots$ $\frac{A - B\text{ танг. } H}{2D}$; слѣд. при верху поднимающейся отрасли будемъ имѣть $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A}{2Dk^2}$.

Равномѣрно будемъ имѣть для опускающейся къ низу отрасли, $C' + \text{танг. } H\,(\frac{1}{2}\text{ сек. } H + \text{ и проч.}) = \frac{k'^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A' + B'\text{ танг. } H}{2D'}$; слѣд. при верху выходитъ $\frac{k'^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'}$ и $\frac{A'}{2D'}$

$= C'$. Слѣд. $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'k'^2} = \frac{A}{2Dk^2}$.

А поелику $\frac{p}{k^2} : \frac{p}{k'^2} = D : D'$, и потому $D'k'^2 = Dk^2$; въ сходственность чего $A' = A$ и $C' = \frac{A'}{2D'} = \frac{A}{2D'} = C$; и наконецъ $A' = 2CD'$, и $B' = 2Da' + \frac{2C(D - D')}{\text{танг.}\, I'}$.

Мы увидимъ тотчасъ, какъ опредѣляется a' и *танг.* I'; а теперь будемъ продолжать изслѣдовать наше уравненіе.

Поелику $dx = \frac{d\,\text{танг.}\,H}{A' + B'\,\text{танг.}\,H}$, то получимъ $x = \frac{1}{B'}\,\text{лог.}\,\frac{A' + B'\,\text{танг.}\,H}{A'}$, замѣтивъ, что x должно быть равно нулю, когда *танг.* $H = o$.

Что принадлежитъ до y, то мы будемъ имѣть $\frac{dy}{dx} = -\,\text{танг.}\,H$; слѣд. $dy = -\,dx$ *танг.* $H = -\frac{\text{танг.}\,H\,d\,\text{танг.}\,H}{A' + B'\,\text{танг.}\,H} = -\frac{1}{B'}$

d *танг.* Н $+ \frac{A'}{B'} \times \frac{d \text{ танг. } H}{A' + B' \text{ танг. } H}$, и слѣд.

$y = C'' - \frac{1}{B'}$ *танг* Н $+ \frac{A'}{B'B'}$ *лог.* (A′ + B′ *танг.* Н). А поелику, когда *танг.* Н $= o$, должно вытти $y = Y$; и потому $y = Y - \frac{\text{танг. } H}{B} + \frac{A'}{B'B'}$ *лог* $\frac{A' + B' \text{ танг. } H}{A'}$. Естьли выведемъ изъ уравненія въ x величину *лог.* $\frac{A' + B' \text{ танг. } H}{A'}$ и величину *танг.* Н, то по вставкѣ ихъ въ семъ послѣднемъ, будемъ наконецъ имѣть $y = Y + \frac{A'}{B'} x - \frac{A'}{B'B} \left(e^{B'x} - 1\right)$, e означаетъ число, котораго логариѳмъ равенъ 1.

А поелику Y опредѣлено по уравненію $Y = \frac{AX - \text{танг. } I}{B}$ найденному выше, то для сысканія второй части x выстрѣла или амплитуды опускающейся отрасли, должно вставить въ уравненіи для y вмѣсто x многія разныя числа до тѣхъ поръ, пока найдешь такое, по которому здѣлается $y = o$.

832. Но какъ A′ и B′ зависятъ отъ D, D′, a, a', *танг.* I, *танг.* I′, то надобно теперь умѣть опредѣлить сіи послѣднія величины.

D извѣстно непосредственно по своей величинѣ $\frac{p}{k^2}$. Чтожъ принадлежитъ до D′, то оно содержится къ D, какъ густота середины при верху кривой линеи къ извѣстной густотѣ при точкѣ метанія. Но по настоящему изслѣдованію дѣла будетъ весьма удовлетворительно, когда возмешь за густоту при верху ту, какая прилична самой большой ордонатѣ кривой линеи, опредѣленной по допущеніи густоты постоянною. И такъ опредѣли самую большую ордонату по предписанію (539), а густоту по (341); послѣ чего не трудно здѣлать заключеніе для величины D′.

Что касается до величины *танг.* I′, то довольно узнать ее приближенную; такимъ образомъ можно со всякою надежностію взять вмѣсто I′ уголъ паденія на кривой линеи, описанной ядромъ по предположеніи густоты постоянною. Уголъ же этотъ не трудно опредѣлить, какъ скоро будетъ извѣстенъ выстрѣлъ, по предписанному способу (519

и слѣд.); ибо одифференціаливъ уравненіе $y = x\,(\text{танг. I} + \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2.\ \text{I}}) - \ldots$ $\frac{k^4}{8a^2p^2h\ \text{кос}^2.\ \text{I}} \left(e^{\frac{2apx}{k^2}} - 1\right)$, выведенное (819) для постоянной густоты, получимъ

$$\frac{dy}{dx} = \text{танг. I} - \frac{k^2}{4aph\ \text{кос}^2.\ \text{I}} \left(e^{\frac{2apx}{k^2}} - 1\right).$$

Но $\frac{dy}{dx}$ изображаетъ тангенсъ угла склоненія кривой линеи къ горизонту; и слѣд. оное же будетъ изображать тангенсъ угла паденія, естьли вставимъ вмѣсто x величину приличную $y = o$ въ уравненіи $y = x\,(\text{танг. I}$ + и проч) — и проч. то есть, величину выстрѣла по предположеніи густоты постоянною.

А поелику величина a' обращается въ $\frac{1}{2}$ *сек.* H + $\frac{1}{2}$ *кот.* H *лог. танг.* (45° + $\frac{1}{2}$ H), когда H будетъ $=$ I′, то не трудно ее опредѣлить по извѣстному I′; притомъ эта величина a' равно какъ I′, не требуетъ большой точности.

833. Поелику величины a и a', или вообще величина $\frac{1}{2}$ *сек.* H + $\frac{1}{2}$ *кот.* H *лог. танг.* (45° + $\frac{1}{2}$ H) служатъ основаніемъ настоящаго изслѣдованія, то мы за нужное почитаемъ приложить здѣсь онымъ таблицу.

ТАБЛИЦА *величинамъ количества, означеннаго чрезъ а въ выкладкѣ сопротивленія воздуха при движеніи бросаемыхъ тѣлъ.*

град		град.		град.	
0.	1,00000	30.	1,05306	60.	1,38017
1.	1,00005	31.	1,05727	61.	1,40616
2.	1,00020	32.	1,06171	62.	1,43429
3.	1,00045	33.	1,06640	63.	1,46484
4.	1,00081	34.	1,07134	64	1,49807
5.	1,00127	35.	1,075[illegible]9	65	1,53433
6.	1,00184	36.	1,08206	66.	1,57402
7.	1,0025[illegible]	37.	1,08787	67.	1,6[illegible]759
8.	1,00328	38.	1,09400	68.	1,66562
9.	1,00417	39.	1,10001	69.	1,71872
10.	1,00516	40.	1,107[illegible]0	70.	1,77772
11.	1,00626	41.	1,1145[illegible]	71.	1,84355
12.	1,00748	42.	1,12215	72.	1,91740
13.	1,00881	43.	1,13022	73.	2,00071
14.	1,009[illegible]2	44.	1,13875	74.	2,09531
15.	1,01184	45.	1,1477[illegible]	75.	2,20349
16.	1,01354	46.	1,15741	76.	2,32824
17.	1,01536	47.	1,16752	77.	2,47344
18.	1,01732	48.	1,17826	78.	2,64428
19.	1,01842	49.	1,1[illegible]973	79	2,84788
20.	1,02165	50.	1,20189	80.	3,09418
21.	1,02404	51.	1,21483	81.	3,39753
22.	1,02657	52.	1,22862	82.	3,77960
23.	1,02926	53.	1,24333	83.	4,27430
24.	1,03212	54.	1,25903	84.	4,93833
25.	1,03514	55.	1,2758[illegible]	85.	5,87383
26.	1,03834	56.	1,2938[illegible]	86.	7,28508
27.	1,04172	57.	1,313[illegible]0	87.	9,90478
28.	1,04530	58.	1,33382	88.	14,39754
29.	1,04907	59.	1,35612	89.	28,69102
30.	1,05306	60.	1,38017	90	безконечная.

834. Вотъ какимъ образомъ дѣлается выкладка выстрѣловъ, когда обратимъ вниманіе на перемѣну густоты.

Опредѣливъ $\frac{p}{k^2}$ по показанному (524) и выведши (525) величину h, естьли она не будетъ дана, по пробѣ зделанной подъ какимъ нибудь угломъ, вычисли потомъ выстрѣлъ, самую большую ордонату и уголъ паденія по предположеніи густоты постоянною, поступая для первыхъ вещей по предписанію (520 и 539), а для угла паденія по изъясненному ниже.

Самая большая ордоната опредѣлитъ густоту при верху кривой линеи (341). Слѣд. 2D и 2D′ будутъ извѣстны.

Что принадлежитъ до величины C, то ее не трудно вычислить, потому что (519) мы нашли
$$C = \frac{k^2}{4ph\ \text{кос}^2.\ I} + a\ \text{танг.}\ I.$$

По углу метанія найдешь величину a, а по углу паденія величину a' въ приложенной при семъ таблицѣ. Слѣд. всѣ количества, входящія въ выраженіе A, A′, B и B′ будутъ извѣстны, и слѣд. самыя количества A, A′, B и B′ опредѣлятся также.

Амплитуда X поднимающейся отрасли и самая большая ея ордоната Y найдутся по уравненіямъ $X = \frac{1}{B}\ \text{лог.}\ 2Ah\ \text{кос}^2.\ I$, и $Y = \frac{AX - \text{танг.}\ I}{B}$.

ТАБЛИЦА *мортирныхъ выстрѣловъ, вычисленныхъ по предположенiи, 1е что воздухъ не противится; 2е что онъ противится; и сравненныхъ съ наблюденными выстрѣлами на пробахъ, дѣланныхъ въ ла Ферѣ Октября 1771 года по приказанiю Маркиза де Монтейнарда и подъ управленiемъ Бригадира де Бовоара.*

Углы метанiя	Выкладочные выстрѣлы		Наблюденные выстрѣлы	Продолженiе времени выстрѣловъ			Углы паденiя
	Безъ сопротивленiя воздуха	При сопротивленiи воздуха		Безъ сопротивленiя	При сопротивленiи	Пробные	
град.	тоаз.	тоаз.	тоаз.	секунд.	секунд.	секунд.	град.
10	253	227	257. 249. 221. 228.	$4\frac{1}{5}$	$4\frac{1}{20}$	4	14
20	476	396	440. 424. 394. 398.	$8\frac{3}{10}$	8	$7\frac{1}{3}$	26
30	640	500	451. 516. 537. 492.	$12\frac{1}{5}$	$11\frac{3}{10}$	$10\frac{3}{4}$	36
40	728	547	569. 575. 574. 544. 577.	$15\frac{3}{5}$	$14\frac{2}{5}$	$14\frac{2}{3}$	48
43	738	549	506. 517. 543. 509. 544.	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{5}$	14	$50\frac{1}{2}$
45	739	547	490. 536. 505. 489. 554.	$17\frac{1}{5}$	$15\frac{4}{5}$	$15\frac{1}{5}$	$52\frac{2}{3}$
50	728	534	481. 512. 488. 507.	$18\frac{3}{5}$	$16\frac{9}{10}$	16	$57\frac{1}{2}$
60	640	467	457. 424. 457. 448.	21	$19\frac{3}{10}$	$19\frac{1}{3}$	68
70	476	348	349. 297. 349. 328.	$22\frac{4}{5}$	$20\frac{7}{10}$	22	74
75	370	277	298. 265. 261. 256.	$23\frac{2}{5}$	$21\frac{7}{10}$	22	78

Бомбы въ показанныхъ пробахъ были употреблены 11 дюймовъ 10 линей въ дiаметрѣ, а вѣсомъ во 142 фунта со всѣми къ нимъ принадлежностями и землею; зарядъ пороха былъ полагаемъ въ 3 и $\frac{3}{4}$ фунта.

Исчисливъ сіи количества, опредѣли амплитуду опускающейся отрасли по уравненію $y = Y + \frac{A'x}{B'} - \frac{A'}{B'B'}\left(e^{B'x} - 1\right)$, вставливая вмѣсто x попеременно разныя величины до тѣхъ поръ, пока найдешь такую, которая здѣлаетъ $y = o$. Въ этомъ получишь вторую часть выстрѣла; сложи величину сію съ X, сумма покажетъ цѣлой выстрѣлъ.

По сему именно способу мы вычислили выстрѣлы ядрами, которые можно видѣть въ ниже-приложенной второй таблицѣ.

835. Что принадлежитъ до бомбовыхъ пробъ, помѣщенныхъ въ первой таблицѣ, то мы выкладку для нихъ дѣлали, не обращая вниманія на перемѣну густоты воздуха; потому что высоты, на которыя бомбы должны подняться при самыхъ большихъ выстрѣлахъ, гдѣ наиболѣе дѣйствіе перемѣны густоты ощутительнѣе, суть однакожь такъ малы, что и безъ того обойтися можно. И такъ мы вычислили ихъ по предложенному (520) способу, а время продолженія сихъ выстрѣловъ (542).

836. А чтобъ привести въ состояніе судить, сколь много предположеніе, что кривая линея, описываемая брошенными тѣлами, есть парабола, не согласно съ самымъ дѣломъ; то мы помѣстили въ сей таблицѣ такіе выстрѣлы, каковы бы они должны быть безъ чувствительнаго сопротивленія воздуха. И замѣтивъ въ разсужденіяхъ своихъ касательно сихъ пробъ, что выстрѣлы подъ 10 и 20 градусами сопровождаются нѣкоторыми неудобствами на практикѣ, мы не употребили ни того ни другаго угла для опредѣленія силы пороха; но выбрали средній вы-

стрѣлъ подъ 30 градусами; отъ онаго зделали заключенiе по показанному (525) способу о величинѣ h, или о высотѣ приличной скорости метанiя; то есть, о силѣ пороха сихъ пробъ. Мы нашли $h = 370$ тоазамъ; а это показываетъ (176), что скорость ядра должна быть въ пустотѣ по 366 футовъ въ секунду.

Что принадлежитъ до количества $\frac{p}{k^2}$, то вотъ какимъ образомъ мы его опредѣлили. Должно себѣ припомнить (501), что $\frac{p}{k^2} = \frac{nDS}{M}$. И такъ принявъ $2r$ за дiаметръ бомбы и представивъ чрезъ $1 : c$ содержанiе дiаметра къ окружности, получимъ въ cr^2 площадь большаго круга бомбы. Слѣд. (396) $S = \frac{1}{2} cr^2$. Величина бомбы изобразится чрезъ $\frac{4}{3} cr^3$; наконецъ представивъ чрезъ D' плотность, получимъ въ $\frac{4}{3} cr^3 D'$ массу ея M. Притомъ же (332) мы нашли $n = \frac{1}{2}$; слѣд. въ сходственность сего будемъ имѣть $\frac{p}{k^2} = \frac{3}{16} \times \frac{D}{D'r} = \frac{3}{8} \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}$. А какъ толщина бомбы равна $\frac{4}{3} cr^3$, и притомъ кубической футъ воздуха вѣситъ $\frac{70 \text{ фун.}}{850}$, то вѣсъ величины воздуха, занимаемой бомбою, будетъ состоять изъ $\frac{4}{3} cr^3 \times \frac{70}{850}$, полагая r даннымъ въ футахъ. Но вѣсъ бомбы употребленной для пробы, былъ во 142 фунта; и потому $D : D' = \frac{4}{3} cr^3 \times \frac{70}{850} : 142$, слѣд. $\frac{D}{D'} = \frac{\frac{4}{3} cr^3 \times 7}{85 \times 142}$; а какъ дiаметръ такого рода бомбъ величиною въ 11 дюймовъ и 10 линей, или 0ф.986111, то найдемъ $\frac{D}{D'} = 0{,}00029325$, и слѣд. $\frac{p}{k^2} = \frac{3}{8} \times$

$0,00029325 \times \frac{1}{сф,986111} = \frac{3}{8} \times 0,00029325 \times \frac{1}{от,164352}$
$= 0,0004812$.

837. Для умноженія сравненій нашихъ съ практикою, мы здѣлали также выкладку по предписанному (542) способу, продолженію времени выстрѣловъ.

838. Можно замѣтить, что всѣ почти выкладочные выстрѣлы сходствуютъ съ наблюденными; естьли же которые и выступаютъ изъ границъ тѣхъ, то удаленіе первыхъ не превосходитъ разницы, замѣчаемой въ послѣднихъ. Но предположивъ воздухъ безъ сопротивленія, великую найдемъ отмѣну.

Что принадлежитъ до продолженія времени выстрѣловъ, то оно, какъ легко можно видѣть, съ великою точностію сходствуетъ.

839. Посудимъ теперь о таблицѣ выстрѣловъ ядрами.

Чтобъ имѣть вѣрнѣе мѣру пороховой силы, мы вычислили напередъ h посредствомъ средняго выстрѣла подъ 5 градусами, потомъ мы вычислили его же посредствомъ средняго выстрѣла подъ 10 градусами, и взяли за h среднюю величину между двумя найденными. Мы здѣлали выкладку для обѣихъ сихъ величинъ по предписанному (525) способу, не обращая вниманія на перемѣну густоты воздуха, потому что дѣйствіе его весьма маловажно подъ этими углами. Такимъ образомъ величину h, которая выходитъ среднимъ результатомъ изъ осьми наблюденій, должно почитать весьма вѣрною. Мы нашли $h = 4393$ тоазамъ; а это показываетъ (176), что скорость

ядра при вылетѣ изъ пушки должна быть въ 1262 фута на секунду въ пустотѣ. Слѣд. можно надежно принимать въ показанныхъ пробахъ 1262 за скорость 24 фунтоваго ядра по заряду въ $8\frac{1}{2}$ фунтовъ пороха.

Что принадлежитъ до $\frac{p}{k^2}$, то хотя употреблены для означенныхъ здѣсь пробъ ядра также 24 фунтовые какъ тѣ, о которыхъ сказано (524); однакожъ поелику прежнія предположены были 5,444 въ діаметрѣ, а сіи 5,5; и потому мы уменьшили величину $\frac{p}{k^2}$ найденную (524) въ содержаніи 5,5 къ 5,444, какъ тому и должно быть, потому что $\frac{p}{k^2} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}$ (524). Въ сходственность сего мы положили $\frac{p}{k^2} = 0,00081189$.

840. По этимъ-то даннымъ вещамъ мы вычислили, какъ было показано (520 и 539) выстрѣлы и тѣ высоты, до которыхъ ядра должны были достигать при допущеніи густоты постоянною. Правда, что и то и другое опредѣлено слишкомъ больше, какъ мы то уже замѣтили; но поелику въ этой выкладкѣ мы имѣли только въ виду опредѣлить уголъ паденія и густоту середины при верху кривой линеи, то она и довольно достаточна для сего предмета. Мы включили ее въ таблицу для облегченія труда читателей, желающихъ возобновить ее. Что принадлежитъ до выстрѣловъ, обращая вниманіе на измѣненіе густоты воздуха, то мы зделали имъ выкладку по предложенному (830 и

Сравнительная таблица между выстрѣлами изъ пушки 24, по $8\frac{1}{2}$ фунт. заряду пороха, такими, каковы бы они должны быть 1е. безъ сопротавленія воздуха; 2е. при одинакой густотѣ его на разныхъ высотахъ; 3е. при уменьшеніи густоты его по мѣрѣ, какъ ядро поднимается выше; и между наблюденными выстрѣлами на пробахъ, дѣланныхъ въ ла Ферѣ Октября 1771 года по приказанію Маркиза де Монтейнарда и подъ управленіемъ Бригадира де Бовоара.

УГЛЫ метанія	ВЫСТРѢЛЫ.				ВЫСОТЫ, на которыя ядро долженствовало подниматься			ПРОДОЛЖЕНІЕ времени выстрѣловъ.			УГЛЫ паденія.
	Безъ сопротивленія воздуха.	По первому приближенію, принимая густоту воздуха постоянною.	При уменьшеніи густоты воздуха	Пробные.	Безъ сопротивленія воздуха.	По первому приближенію, принимая густоту воздуха постоянною.	При уменьшеніи густоты воздуха.	Безъ сопротивленія воздуха.	При сопротивленіи.	Пробные.	
град.	тоаз.	тоаз.	тоаз.	тоаз.	тоаз.	тоаз.	тоаз.	секунд.	секунд.	секунд.	град.
5	1526	896	902	927 910 898 946	33	25	25	$7\frac{3}{10}$	6	7	$8\frac{1}{2}$
10	3005	1295	1313	1273 1218 1237 1199	133	80	81	$14\frac{1}{2}$	10	$10\frac{1}{4}$	18
15	4393	1531	1575	1588 1669 1650 1495	294	155	158	$21\frac{3}{5}$	$14\frac{3}{5}$	$15\frac{1}{4}$	32
20	5644	1714	1774	1636 1689 1783 1796	514	243	267	$28\frac{3}{5}$	$18\frac{7}{10}$	19	42
25	6730	1823	1884	1740 1766 1805 1909	784	342	361	$35\frac{3}{10}$	22	20	50
30	7609	1889	1965	1945 1843 2030 1877	1098	447	475	$41\frac{4}{5}$	$25\frac{1}{5}$	$24\frac{1}{2}$	58
35	8274	1917	2040	1871 1960 1852 1839	1445	560	609	$47\frac{9}{10}$	28	27	64
40	8653	1913	2024	2023 2001 1913 1851 1967	1816	677	737	$53\frac{7}{10}$	$30\frac{4}{5}$	$32\frac{4}{5}$	68
43	8764	1896	2001	2210 2163 2146 2221 2176	2044	750	823	57	$32\frac{3}{10}$	34	70
45	8786	1879	1984	2094 2040 2167 2032 1955	2197	798	882	$59\frac{1}{10}$	$33\frac{2}{5}$	34	72
50	8653	1813	1893	2000 1980 1972 1952	2578	929	1036	64	$35\frac{4}{5}$	36	75
60	7609	1581	1646	1689 1584 1766 1487	3295	1173	1358	$72\frac{2}{5}$	$40\frac{1}{5}$	$43\frac{1}{2}$	81
70	5644	1202	1211	1123 1271 1351 1194	3879	1350	1668	$78\frac{1}{2}$	44	46	83
75	4393	932	937	885 882 917 910	4099	1522	1832	$80\frac{7}{10}$	$45\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	84



слѣд.) способу; величину ихъ должно почитать за весьма достаточную и для самой строгой теоріи.

841. Можно теперь судить по приложенной таблицѣ, какъ велико дѣйствіе воздушнаго сопротивленія. Не трудно (474) вычислить, каковы бы должны быть выстрѣлы по той же опредѣленной силѣ пороха безъ сопротивленія этой середины. На примѣръ подъ 45 градусомъ выстрѣлъ долженъ бы быть въ 8786 тоазовъ. Выкладка показываетъ, что этотъ же выстрѣлъ при допущеніи сопротивленія долженъ бы выйти только въ 1984 тоаза: но на пробахъ сдѣланныхъ подъ этимъ числомъ градусовъ найденъ въ 2054. И такъ въ настоящей теоріи разность не болѣе можно полагать, какъ въ 70 тоазовъ: но дѣлая выкладку по параболѣ, она будетъ разниться на 6732 тоаза; такимъ образомъ дѣйствіе сопротивленія воздуха по пробѣ будетъ въ 6732 тоаза, а по теоріи въ 6802.

842. Естьли сравнимъ выкладочные выстрѣлы съ наблюденными; то замѣтимъ, что они вообще всѣ согласуются между собою столько, сколько можно ожидать отъ пробъ, подверженныхъ необходимымъ трудностямъ на практикѣ. Хотя не можно нимало сомнѣваться о великомъ стараніи, какое было приложено для этихъ пробъ; однакожъ самъ наблюдатель, который былъ человѣкъ свѣдущій, признается, что при всемъ стараніи здѣлать всѣ обстоятельства равными, встрѣчались совсѣмъ тѣмъ такія, въ равенствѣ которыхъ не можно увѣриться, а это дѣлаетъ чувствительное вліяніе на разность.

Подобнымъ причинамъ безъ сомнѣнія должно приписать замѣчаемыя два несходства въ наблюденныхъ выстрѣлахъ подъ 35 и 43 градусами. Іе Вы-

стрѣлы подъ 35 градусами выходятъ вообще всѣ слабѣе найденныхъ подъ 30°, хотя по справедливости они должны быть сильнѣе ихъ, потому что пробные подъ 40° выходятъ больше. 2е Выстрѣлы подъ 43° превосходятъ весьма много величину подъ 40°, но этому, казалось бы, не должно быть. Однако жъ нѣтъ сумнѣнія, что по приближеніи къ самымъ большимъ выстрѣламъ разности становятся гораздо меньше, нежели въ прочихъ, какъ то явствуетъ изъ означенныхъ въ таблицѣ трехъ выстрѣловъ; и этому должно вытти во всякомъ другомъ предположеніи сопротивленія.

843. Какъ бы то ни было, но впрочемъ другія двенатцать выстрѣловъ заставляютъ почитать сію теорію весьма вѣрною; и судя по неразлучнымъ съ практикою неудобствамъ, врядъ ли найдется другая, которая бы согласовалась болѣе съ опытомъ.

844. Можно примѣтить изъ сей таблицы и той, которая относится до бомбъ, что уголъ самаго большаго выстрѣла при воздушномъ сопротивленіи весьма много разнится отъ угла самаго большаго въ пустотѣ. Опытъ и въ этомъ случаѣ согласуется съ теоріею, хотя со всѣмъ тѣмъ не при одномъ углѣ. Притомъ же кажется весьма трудно опредѣлить на опытѣ сей уголъ, потому что по приближеніи къ нему разности становятся чрезмѣрно малы.

845. Что принадлежитъ до продолженія времени сихъ выстрѣловъ, то мы здѣлали для нихъ выкладку, принимая густоту воздуха постоянною; и такую выкладку мы здѣлали, потому что выходящая разность отъ принятія ее перемѣнною чрезмѣрно мала. Мы помѣстили на пробахъ замѣченныя продолженія только тѣ, которыя относятся къ среднему выстрѣлу подъ одинакимъ угломъ.

846. Посмотримъ теперь, какъ можно вѣрнѣе опредѣлить кривую линею, описанную тѣломъ въ постоянной серединѣ.

Нашли мы, что ближайшая величина dx есть $dx =$ . . . . , ...

$$\frac{-\frac{k^2}{2p}\, d\,\textit{танг.}\,H}{C - \textit{танг.}\,H[\frac{1}{2}\textit{сек.}\,H + \frac{1}{2}\textit{кот.}\,H\,\textit{лог.танг.}(45^\circ + \frac{1}{2}H)]}.$$

Дѣлаю $\frac{1}{2}$ *сек.* H $+ \frac{1}{2}$ *кот.* H *лог.танг.* $(45^\circ + \frac{1}{2}H) = 1 + A\ \textit{танг}^2.H$. Не трудно увѣриться по таблицѣ величинъ a, приложенной на *страницѣ* 501, что A должно быть количество весьма малое и подверженное также весьма малой перемѣнѣ. Слѣд. можно принимать A постояннымъ количествомъ во всемъ протяженіи кривой линеи; и самая приличная ему величина будетъ та, которую оно имѣетъ у точки метанія. Слѣд. взявши A $=$

$$\frac{-1 + \frac{1}{2}\,\textit{сек.}\,I + \frac{1}{2}\,\textit{кот.}\,I\ \textit{лог.танг.}\,(45^\circ + \frac{1}{2}I)}{\textit{танг}^2.\,I}$$

$= \frac{a-1}{\textit{танг}^2.\,I} = (a-1)\,\textit{кот}^2.\,I$, получимъ

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\,\textit{танг}\ H}{C - \textit{танг.}\,H - A\,\textit{танг}^3.\,H}.$$

Теперь замѣчаю 1е, что эта величина dx, впрочемъ весьма приближенная, совершенно сходствуетъ съ точною его величиною въ трехъ точкахъ кривой линеи, и именно: при точкѣ метанія, при верху и при концѣ опускающейся отрасли, которая имѣетъ одинакое склоненіе съ точкою метанія. 2е Что въ силу величины данной A, меньше всѣхъ тѣхъ, какую это количество A можетъ имѣть на опускающейся отрасли, знаменатель въ dx выходитъ вообще нѣсколько больше настоящаго; и такъ разсуждая въ сходственность (515 и слѣд. и 844), должно заключить, что по такому предположенію выкладочные выстрѣлы будутъ нѣсколько короче настоящихъ. Слѣд. по этому способу и по показанному (503 и слѣд.) найдемъ два ближайшіе предѣла настоящихъ выстрѣловъ.

847. Приступимъ къ интеграціи величины dx. Здѣлавъ $A = \frac{1}{B}$, получимъ

$$\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{B\,d\,\textit{танг}\;H}{-BC + B\,\textit{танг}.H + \textit{танг}^3.H}.$$

Допустимъ c дѣйствительнымъ корнемъ уравненія $\textit{танг}^3.H + B\,\textit{танг}.H - BC = o$; послѣ чего ежели раздѣлимъ $\textit{танг}^3.H + B\,\textit{танг}.H$

— BC на *танг.* H — C, то получимъ опустивъ остатокъ отъ дѣленія, (которой по положенію долженъ равняться нулю) *танг*^{2}. H + c *танг.* H + B + c^2 вторымъ факторомъ знаменателя (*Алг.* 146 и 151).

Въ сходственность сего будемъ имѣть

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{Bd\ \text{танг. H}}{(\text{танг.H}-c)(\text{танг}^2.\text{H}+c\ \text{танг.H}+\text{B}+c^2)}.$$

Раздѣлимъ (108) вторую часть сего уравненія на два фактора $\frac{Dd\ \text{танг. H}}{\text{танг. H}-c}$ и . . .

$\frac{\text{E танг. H}d\ \text{танг. H} + \text{F}d\ \text{танг. H}}{\text{танг}^2.\text{H} + c\ \text{танг. H} + \text{B} + c^2}$; мы найдемъ (111) E = — D, F = — 2Dc, и D = $\frac{\text{B}}{\text{B} + 3c^2}$; и слѣд. выведемъ $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{Dd\text{танг H}}{\text{танг.H}-\text{C}}$

$$- \frac{\text{D танг.H}d\ \text{танг. H} + 2\text{D}cd\ \text{танг. H}}{\text{танг}^2.\text{H} + c\ \text{танг. H} + \text{B} + c^2},$$

или $\frac{2pdx}{\text{D}k^2} = \frac{d\ \text{танг H}}{\text{танг H} - \text{C}} - \frac{1}{2} \times$ . . . .

$$\frac{2\text{танг H}d\ \text{танг. H} + cd\ \text{танг. H}}{\text{танг}^2.\text{H} + c\ \text{танг. H} + \text{B} + c^2} \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{-\frac{1}{2}cd\ \text{танг. H}}{\text{танг}^2.\text{H} + c\ \text{танг. H} + \text{B} + c^2}.$$

Первые два члена представляютЪ логариѳмическіе дифференціалы, которые не трудно обынтегралить. ЧтожЪ принадлежитЪ до третьяго, то здѣлавЪ *танг.* $H + \frac{1}{2} c = z$, $B + \frac{3}{4} c^2 = ff$ и $z = fz'$, мы его превратимЪ вЪ $- \frac{3}{2} \frac{c}{f} \frac{dz'}{z'z' + 1}$, которой (86) изобразитЪ дифференціалЪ дуги круга, коей радіусЪ равенЪ 1, а тангенсЪ состоитЪ изЪ z' или $\frac{z}{f}$ или $\frac{\text{танг } H + \frac{1}{2} c}{f}$; слѣд. по интеграціи получимЪ $\frac{2px}{Dk^2} =$ *лог.* (*танг.* $H - c$) $- \frac{1}{2}$ *лог.* (*танг*^{2} $H + c$ *танг.* $H + B + c^2$) $- \frac{3}{2}$ $\frac{c}{f}$ *дуг. танг.* $\left(\frac{\text{танг. } H + \frac{1}{2} c}{f}\right) + C'$; или опредѣливЪ постоянное C' по условію, что $x = o$, когда $H = I$, и притомЪ обративЪ вниманіе, что *танг*^{2}. $H + c$ *танг.* $H + B + c^2 = ($*танг.* $H + \frac{1}{2} c)^2 + ff = ff$ . . . $\left[\left(\frac{\text{танг. } H + \frac{1}{2} c}{f}\right)^2 + 1\right]$ будемЪ имѣть $\frac{2px}{Dk^2}$

$$= \text{лог.}\frac{\text{танг. H} - c}{\text{танг. I} - c} - \tfrac{1}{2}\,\text{лог.}\frac{\left(\frac{\text{танг. H} + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\text{танг. I} + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}$$

$$- \frac{c}{f}\left(\text{дуг. танг.}\frac{\text{танг. H} + \frac{1}{2}c}{f} - \text{дуг. танг.}\frac{\text{танг. I} + \frac{1}{2}c}{f}\right).$$

848. Посмотримъ теперь на величину y.

Мы вывели $\frac{dy}{dx} = \text{танг. H}$, или $dy = dx$. танг. H; и потому $\frac{2pdy}{k^2} = \frac{D\,\text{танг. H}d\,\text{танг. H}}{\text{танг. H} - c}$ $- \frac{D\,\text{танг}^2.\text{H}d\,\text{танг. H} + 2Dc\,\text{танг. H}d\,\text{танг. H}}{\text{танг}^2.\text{H} + c\,\text{танг. H} + B + c^2}$; которое, по учиненіи въ немъ частнаго дѣленія, обращается въ $\frac{2pdy}{k^2} = \frac{Dcd\,\text{танг. H}}{\text{танг. H} - c}$ $- \frac{(Dc - BD - Dc^2)\,\text{танг. H}d\,\text{танг. H}}{\text{танг}^2.\text{H} + c\,\text{танг. H} + B + c^2}$, или въ

$$\frac{2pdy}{Dk^2} = \frac{cd\,\text{танг. H}}{\text{танг. H} - c} - \ldots\ldots$$

$$\frac{\frac{1}{2}c\,(2\text{танг. H} + c)\,d\,\text{танг. H}}{\text{танг}^2.\text{H} + c\,\text{танг. H} + B + c^2} + \ldots$$

$\dfrac{(B + \frac{3}{2} cc)\, d\, \text{танг}.\, H}{\text{танг}^2.\, H + c\, \text{танг}.\, H + B + c^2}$ такое уравненіе, которое трактуя также, какъ мы трактовали величину dx, получимъ . .

$$\frac{2py}{Dk^2} = c\, \text{лог}.\, \frac{\text{танг}.\, H - c}{\text{танг}.\, I - c} - \tfrac{1}{2}.\, \text{лог}. \; . \; . $$

$$\frac{\left(\frac{\text{танг}.\, H + \frac{1}{2} c}{f}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\text{танг}.\, I + \frac{1}{2} c}{f}\right)^2 + 1} + \frac{B + \frac{3}{2} cc}{f} \; . \; . \; .$$

$$\left(\text{дуг. танг.}\, \frac{\text{танг}.\, H + \frac{1}{2} c}{f} - \text{дуг. танг.} \; . \; . \right.$$

$$\left. \frac{\text{танг}.\, I + \frac{1}{2} c}{f} \right).$$

Наконецъ вставивъ произвольную величину вмѣсто H въ обѣихъ найденныхъ уравненіяхъ, выведемъ величину y и ей отвѣтствующую величину x.

А чтобъ получить всю амплитуду или выстрѣлъ, то должно вставливать въ послѣднемъ уравненіи вмѣсто H попеременно разныя отрицательныя величины, до тѣхъ поръ, пока не выдетъ $y = o$. Послѣ чего принявъ эту же величину H въ уравненіи въ x, опредѣлимъ величину x или выстрѣла.

849. Но можно гораздо проще здѣлать обѣ сіи величины x и y такимъ образомъ.

Представимъ чрезъ M дугу, имѣющую тангенсомъ $\frac{танг. H + \frac{1}{2}c}{f}$, а чрезъ M' другую, имѣющую тангенсомъ $\frac{танг. I + \frac{1}{2}c}{f}$, и мы получимъ $дуг. танг. \frac{танг. H + \frac{1}{2}c}{f} = M$; слѣд. $\frac{танг. H + \frac{1}{2}c}{f} = танг. M$, и $танг. H = f\, танг. M - \frac{1}{2}c$; равномѣрно будемъ имѣть $танг\, I = f\, танг. M' - \frac{1}{2}c$. Вставивъ сіи величины, выведемъ $\frac{2px}{Dk^2} = лог. \frac{f\, танг. M - \frac{1}{2}c}{f\, танг. M' - \frac{3}{2}c} - \frac{1}{2}\, лог. \frac{танг^2. M + 1}{танг^2. M' + 1} - \frac{3}{2}\, \frac{c}{f}\, (M - M')$.

Здѣлавъ $f = \frac{3}{2}c\, танг. l$, и обративъ вниманіе на то, что $\frac{син. A}{кос. A} = танг. A$, и $кос. A\, кос. B - син. A\, син. B = кос. (A + B)$, получимъ $\frac{2px}{Dk^2} = лог. \frac{кос. (M + l)}{кос. (M' + l)} \times \frac{кос. M'}{кос. M} - \frac{1}{2}\, лог. \frac{кос^2. M'}{кос^2. M} - \frac{3}{2}\, \frac{c}{f}\, (M - M')$; то есть,

$$\frac{2px}{Dk^2} = \text{лог.}\ \frac{\text{кос.}(M + l)}{\text{кос.}(M' + l)} - \frac{3}{2}\,\frac{c}{f}\,(M - M').$$

Разсуждая такимЪ образомЪ, найдемЪ $\frac{2py}{Dk^2}$

$$= c\ \text{лог.}\ \frac{\text{кос.}(M + l)}{\text{кос.}(M' + l)} + \frac{B + \frac{3}{2}c^2}{f}\,(M - M').$$

850. И такЪ поворачиваясь кЪ началу, получимЪ величину c рѢшивЪ уравненіе танг^3. $H + B\ \text{танг.}\ H - Bc = o$; величину f по уравненію $B + \frac{3}{4}c^2 = ff$; величину l по уравненію $\frac{f}{\frac{3}{2}c} = \text{танг.}\ l$; M по уравненію $\frac{\text{танг.}\ H + \frac{1}{2}c}{f} = \text{танг.}\ M$; наконецЪ M′ по уравненію $\frac{\text{танг.}\ I + \frac{1}{2}c}{f} = \text{танг.}\ M'$.

По опредѢленіи M и M′ вЪ градусахЪ и минутахЪ, найдемЪ совершенную ихЪ величину, умноживЪ величину ихЪ вЪ минутахЪ на 0,0002908882 число, изображающее длину дуги одной минуты; или прибавивЪ кЪ логариѳму M и M′, вычисленныхЪ вЪ минутахЪ, постоянной логариѳмЪ 6,4637261, вЪ суммѢ

ихЪ опредѣлимЪ логариѳмЪ совершенной величины M и M′.

851. Теперь не трудно понять, какЪ можно предложенное (830) примѣнить вЪ семЪ второмЪ способѣ кЪ перемѣнной густотѣ воздуха. Здѣлай $\frac{k^2}{2p} = \frac{1}{2D}$ и допусти,

что $\dfrac{-\frac{1}{2D}\, d\,\textit{танг.}\, H}{C - \textit{танг.} H[\frac{1}{2}\textit{сек}\, H + \frac{1}{2}\textit{кот.} H\, \textit{лог.танг.}(45° + \frac{1}{2}H)]}$

можетЪ представлено быть чрезЪ . . ,

$\dfrac{-d\,\textit{танг.}\, H}{A - B\,\textit{танг}\, H - E\,\textit{танг}^3.\, H}$; величины A, B и E опредѣли по тремЪ слѣдующимЪ уравненіямЪ $\dfrac{1}{2D(C - a\,\textit{танг.}\, I}$ = ...

$\dfrac{1}{A - B\,\textit{танг.}\, I - E\,\textit{танг}^3.\, I}$, $\dfrac{1}{2D'C} = \dfrac{1}{A}$

и $\dfrac{1}{2D(C + a'\,\textit{танг.}\, I'}$ = ...

$\dfrac{1}{A + B\,\textit{танг.}\, I' + E\,\textit{танг}^3.\, I'}$, гдѣ $\dfrac{1}{2D'}$

означаетЪ величину $\frac{k^2}{2p}$ при верху кривой

линеи, а $\frac{1}{2D}$ величину его при точкахЪ метанія и паденія.

852. Отсюда явствуетЪ также, что по сему второму способу не надобно дѣлать выкладки порознь для верхней и нижней отрасли.

853. Между изслѣдованіями, которыя до сихЪ порЪ дѣланы были для опредѣленія кривой линеи, описываемой тѣлами вЪ противящейся серединѣ, мы должны вЪ особенности упомянуть о запискахЪ Кавалера де Борда, читанныхЪ вЪ Академіи НаукЪ 1770 года. Сей АкадемикЪ трактуетЪ вЪ нихЪ о семЪ предметѣ очень умно, но способЪ его совсѣмЪ отличенЪ отЪ обоихЪ показанныхЪ нами.

КонецЪ.



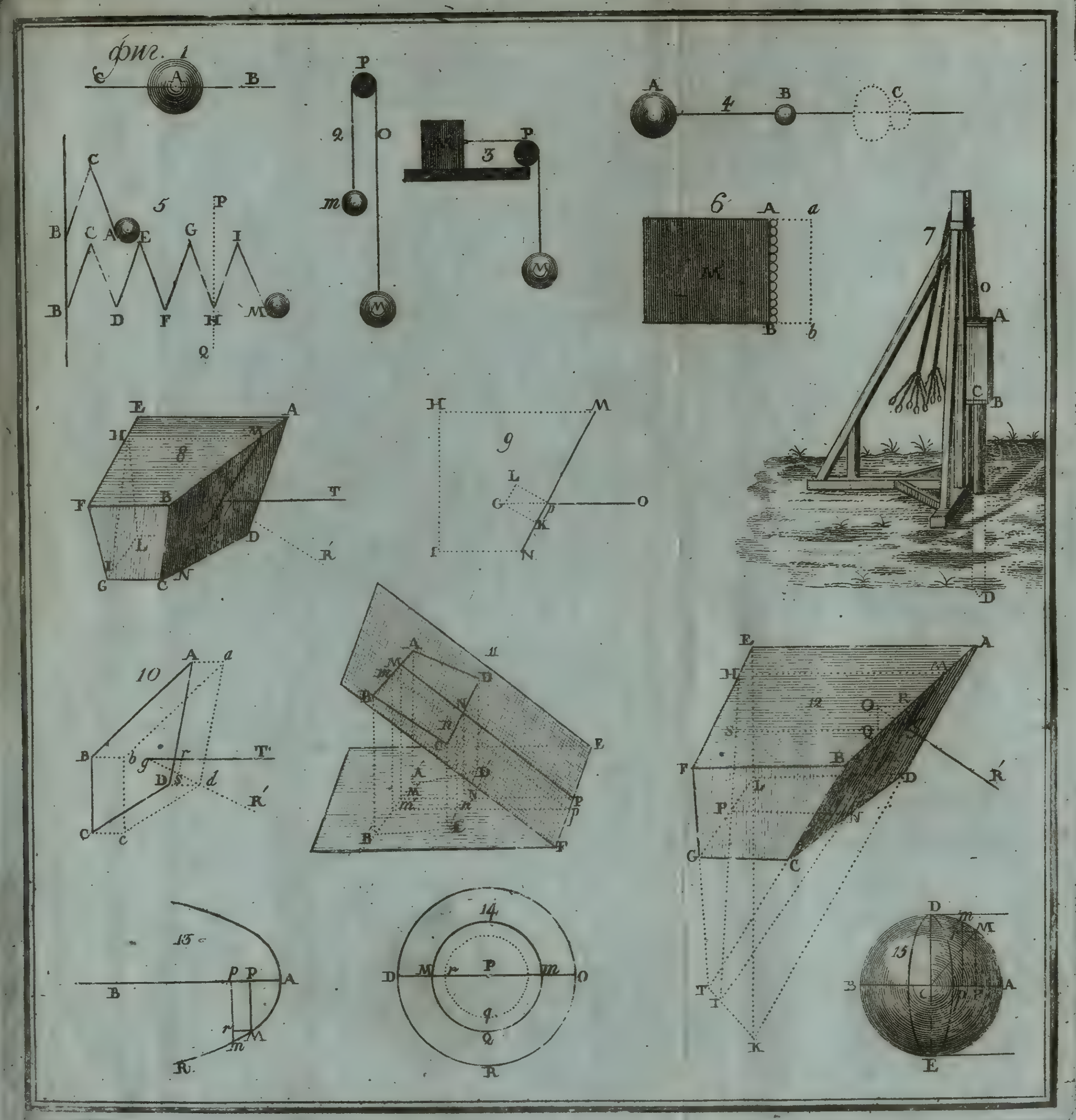


ТАБЛИЦА
Матеріи.

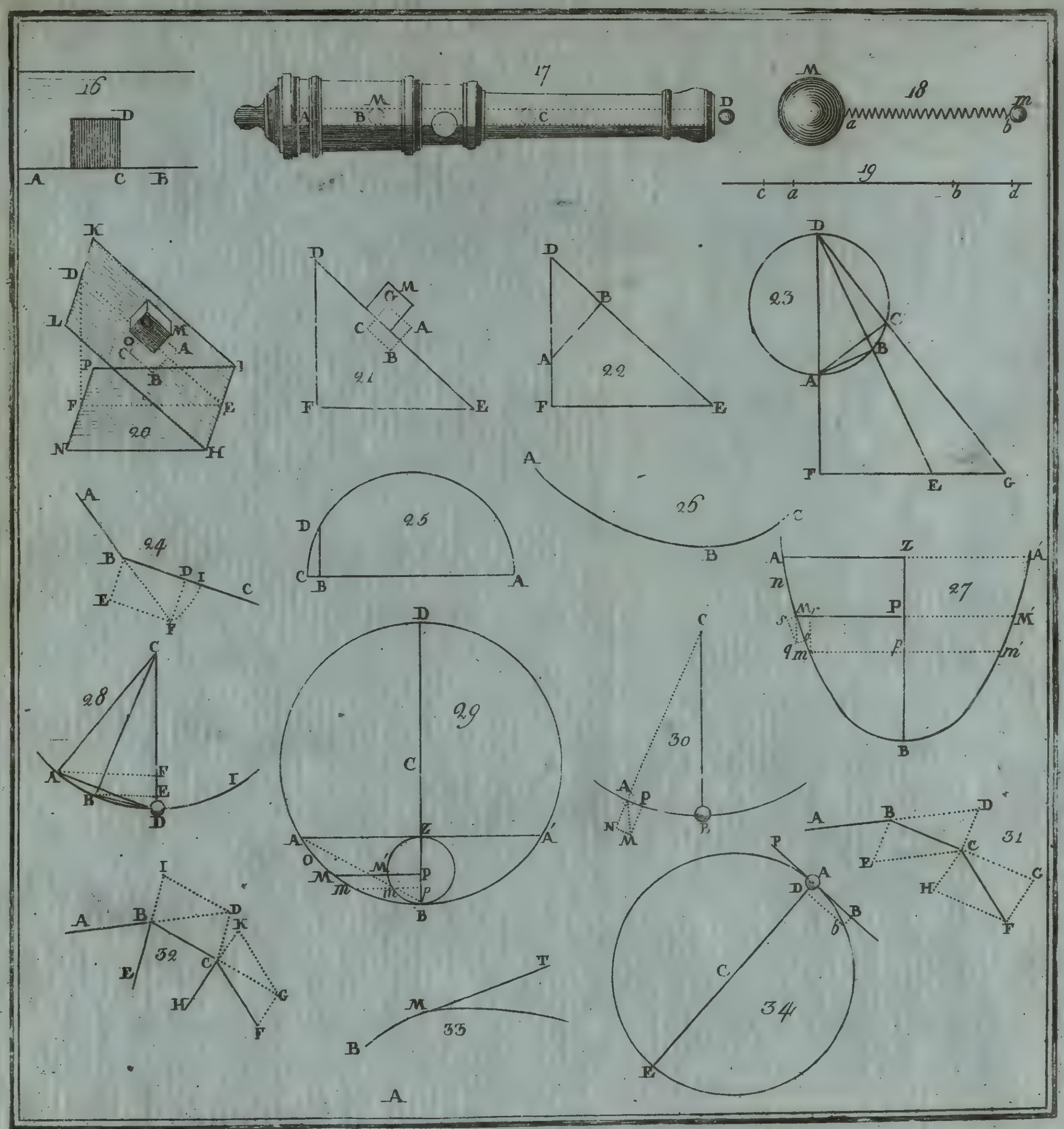
О Равновѣсіи и Движеніи въ Машинахъ.

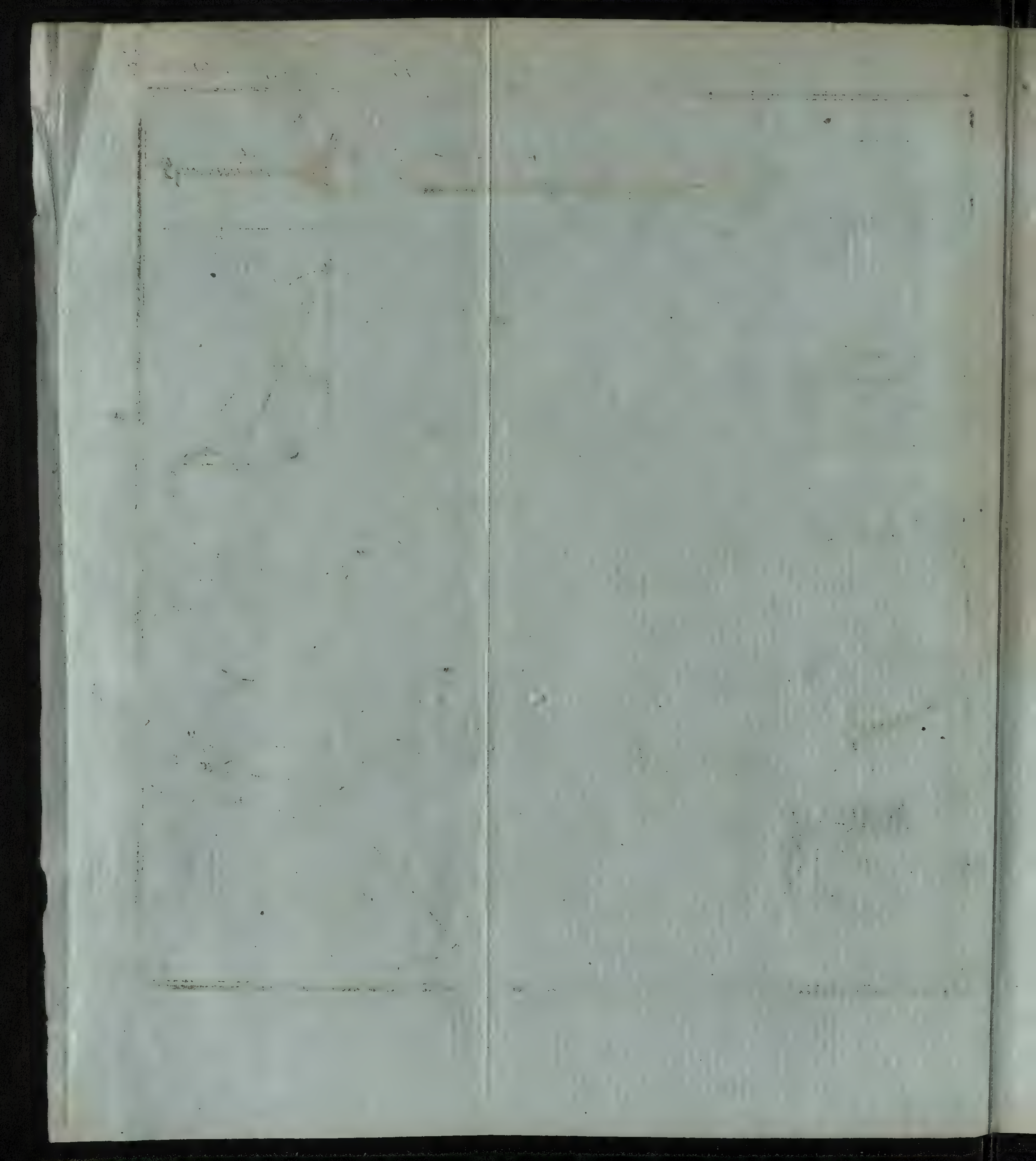
Прибавленіе, въ которомъ подробнѣе изъясняется о движеніи бросаемыхъ тѣлъ въ противящейся серединѣ.

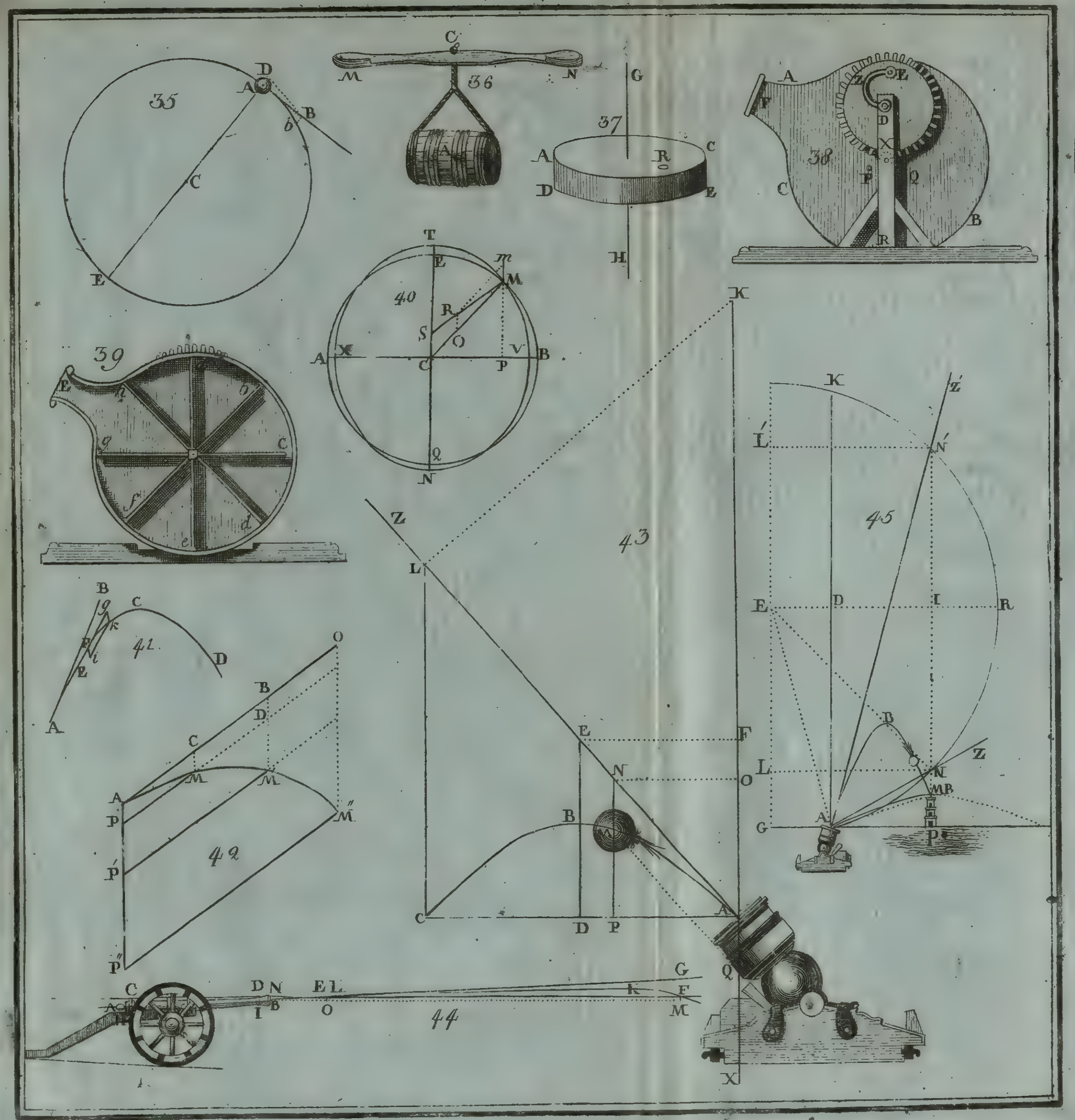
Конецъ таблицы матеріи.

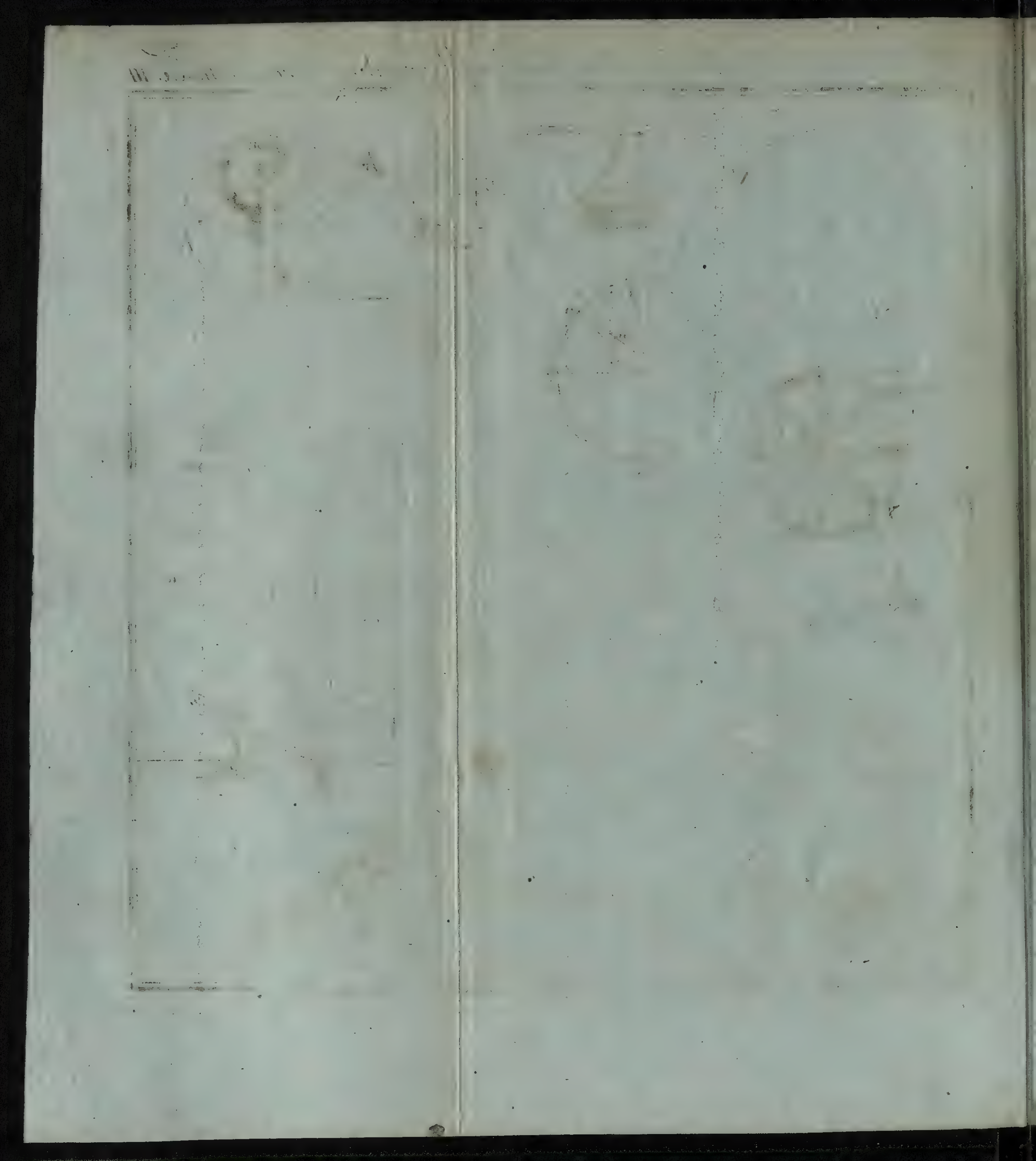

фиг. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

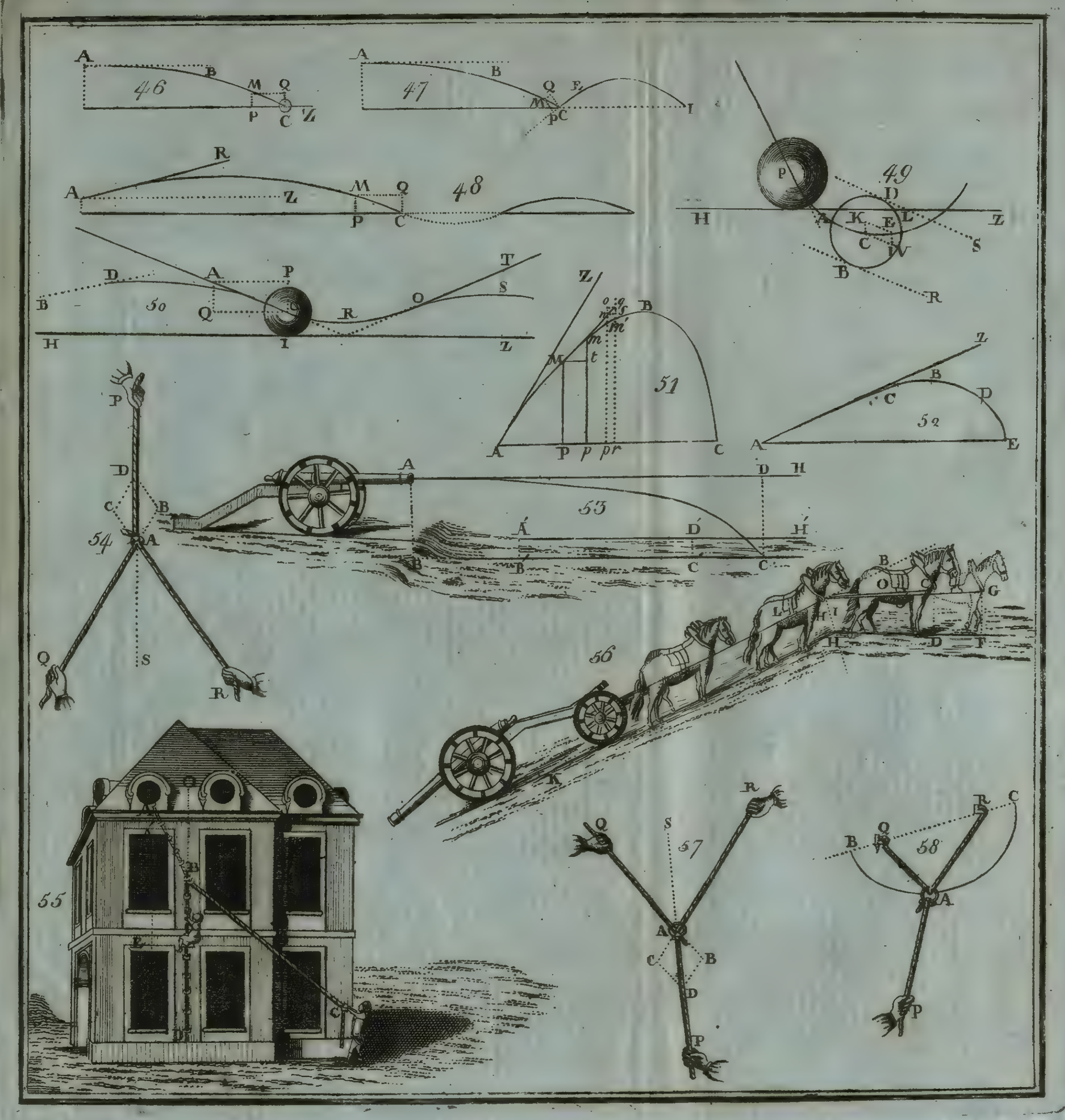







35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45





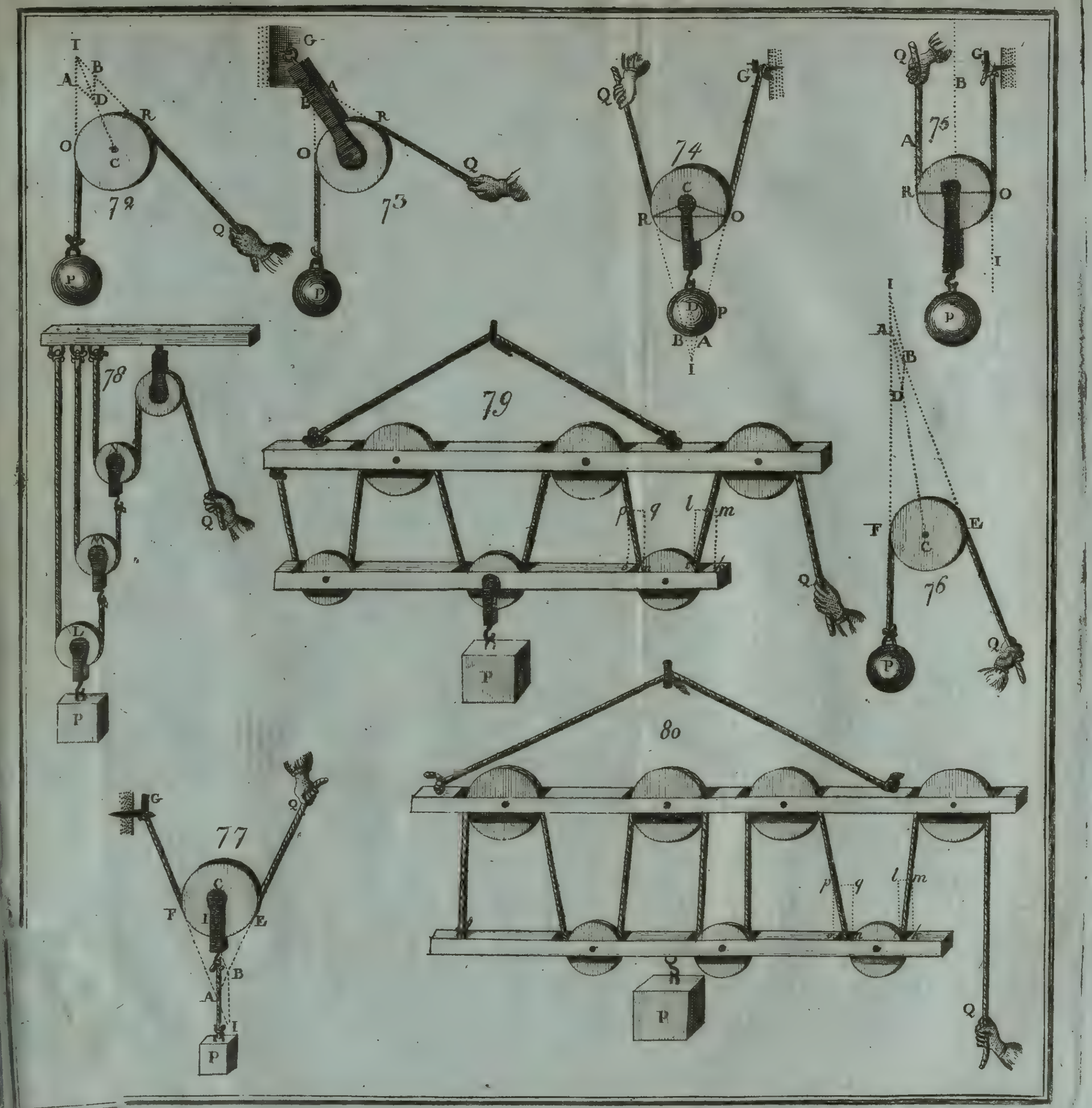
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58



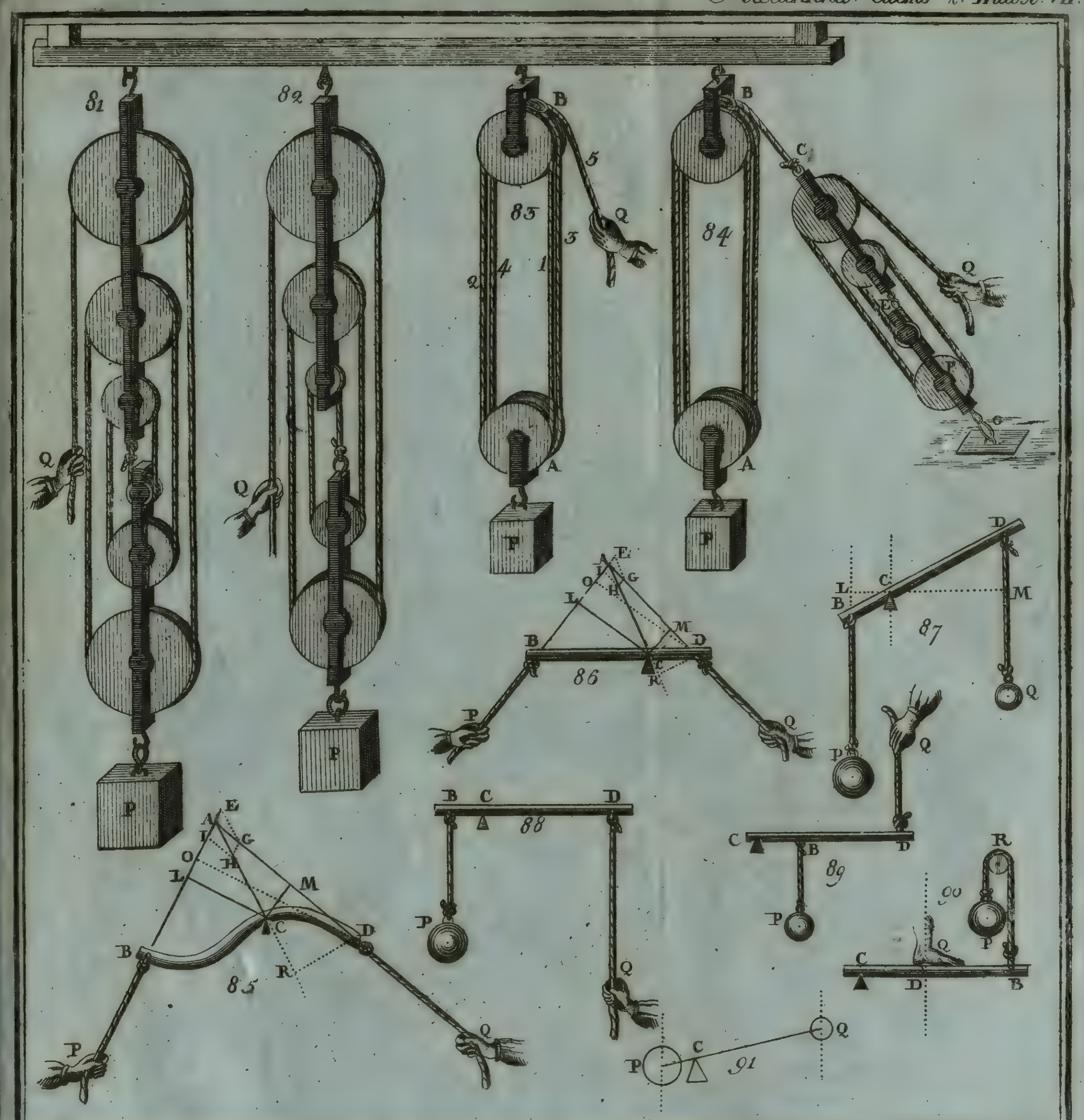


59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71



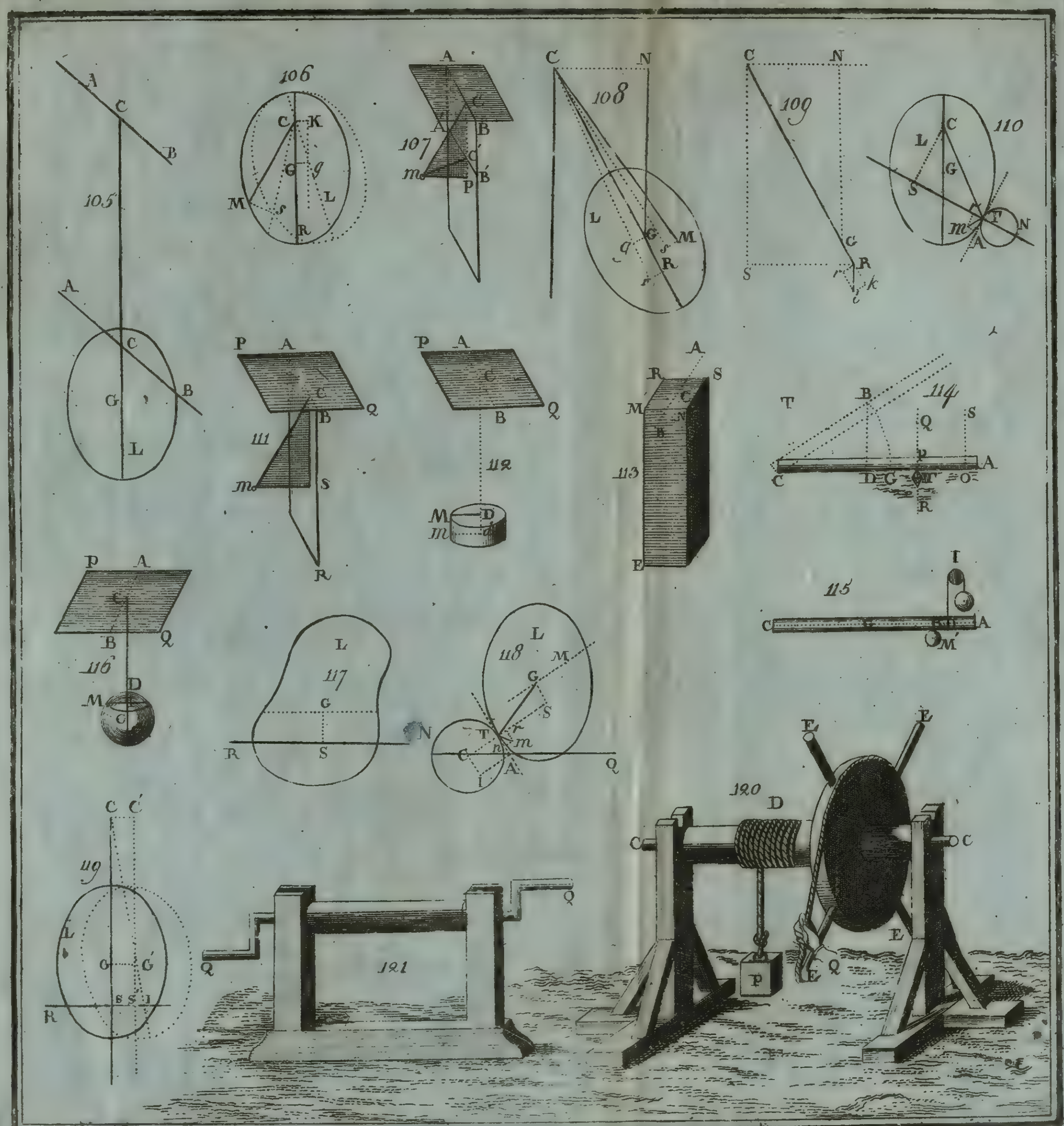

72
73
74
75
76
77
78
79
80





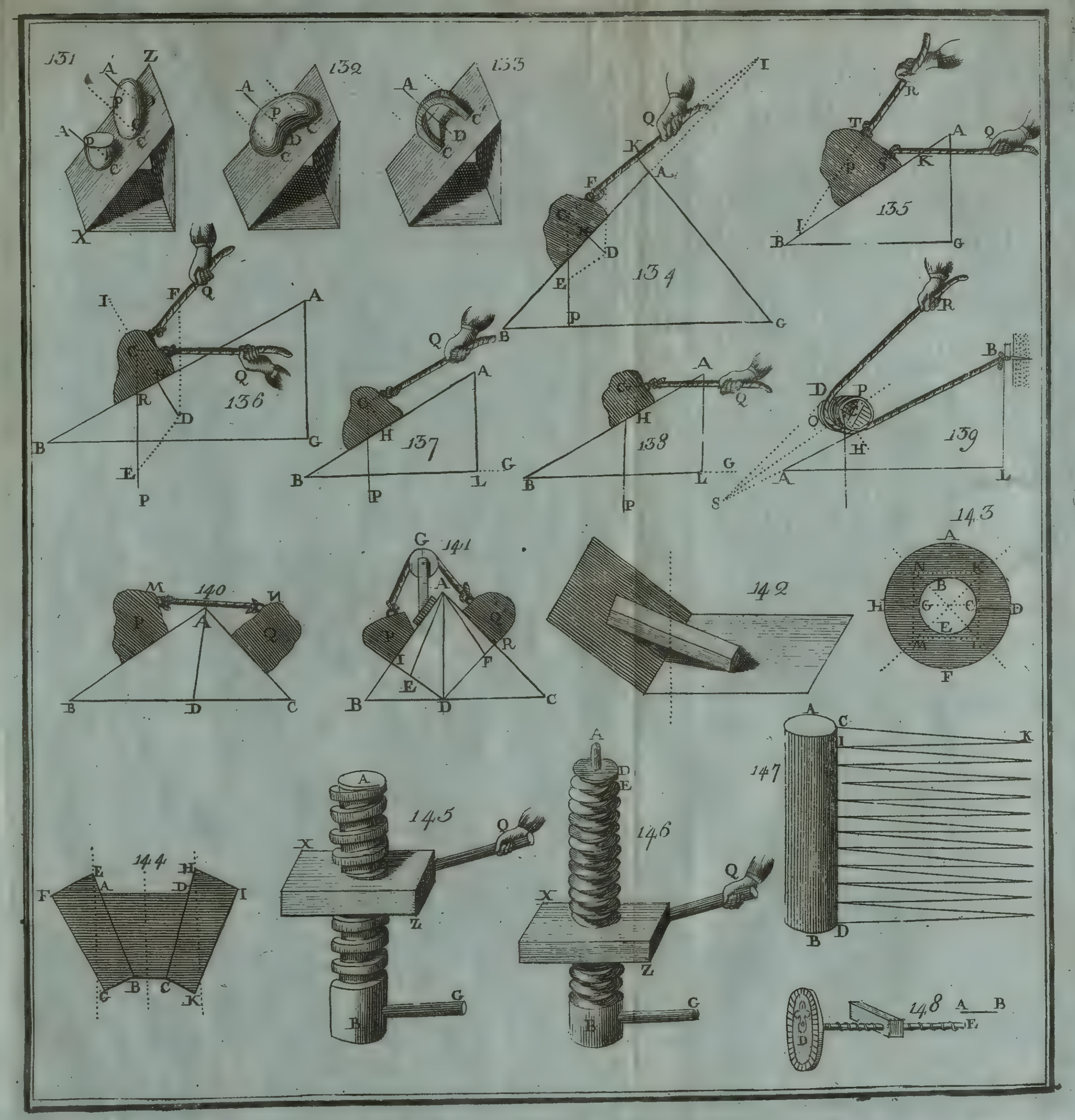



92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104

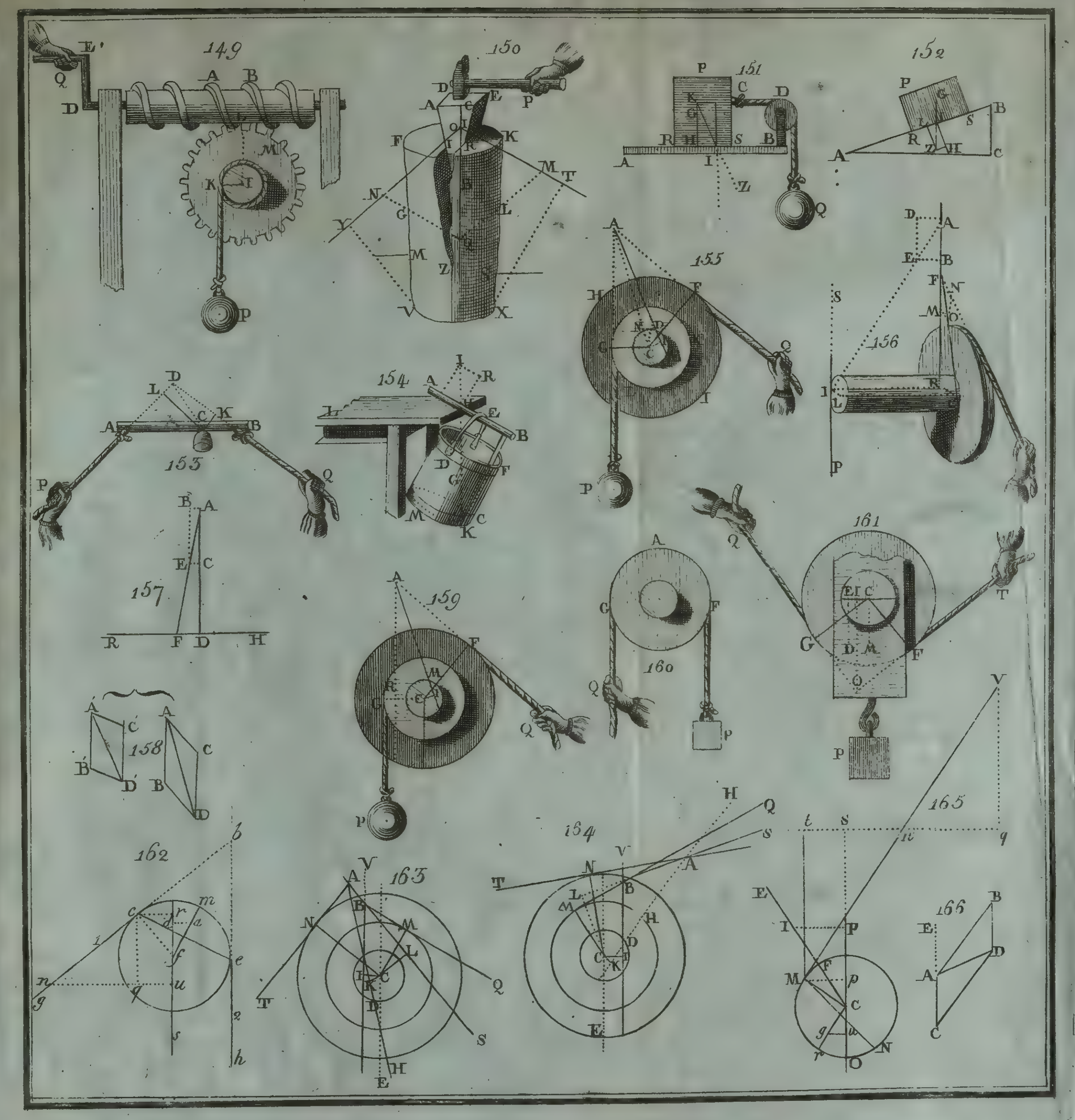

105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121

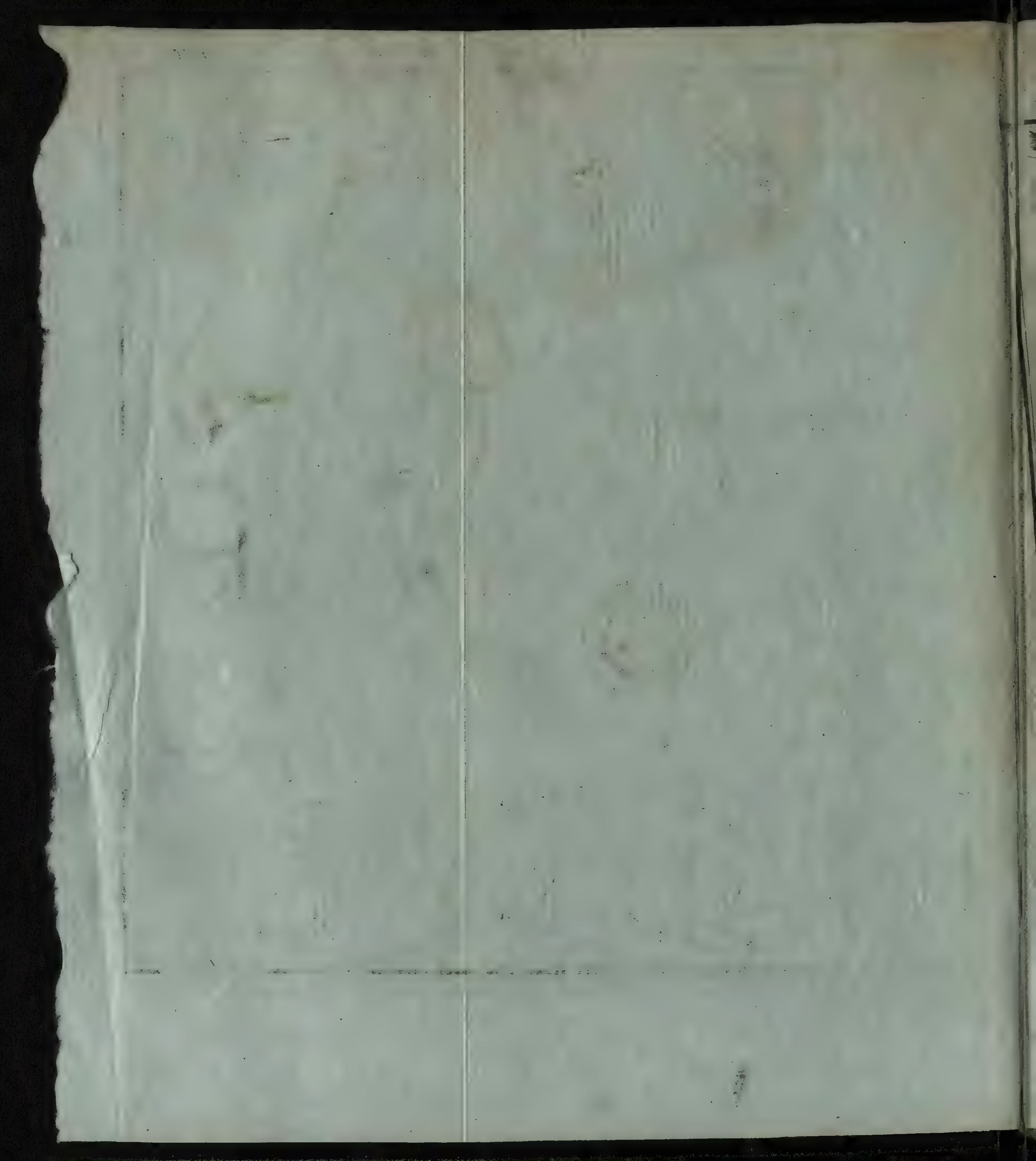


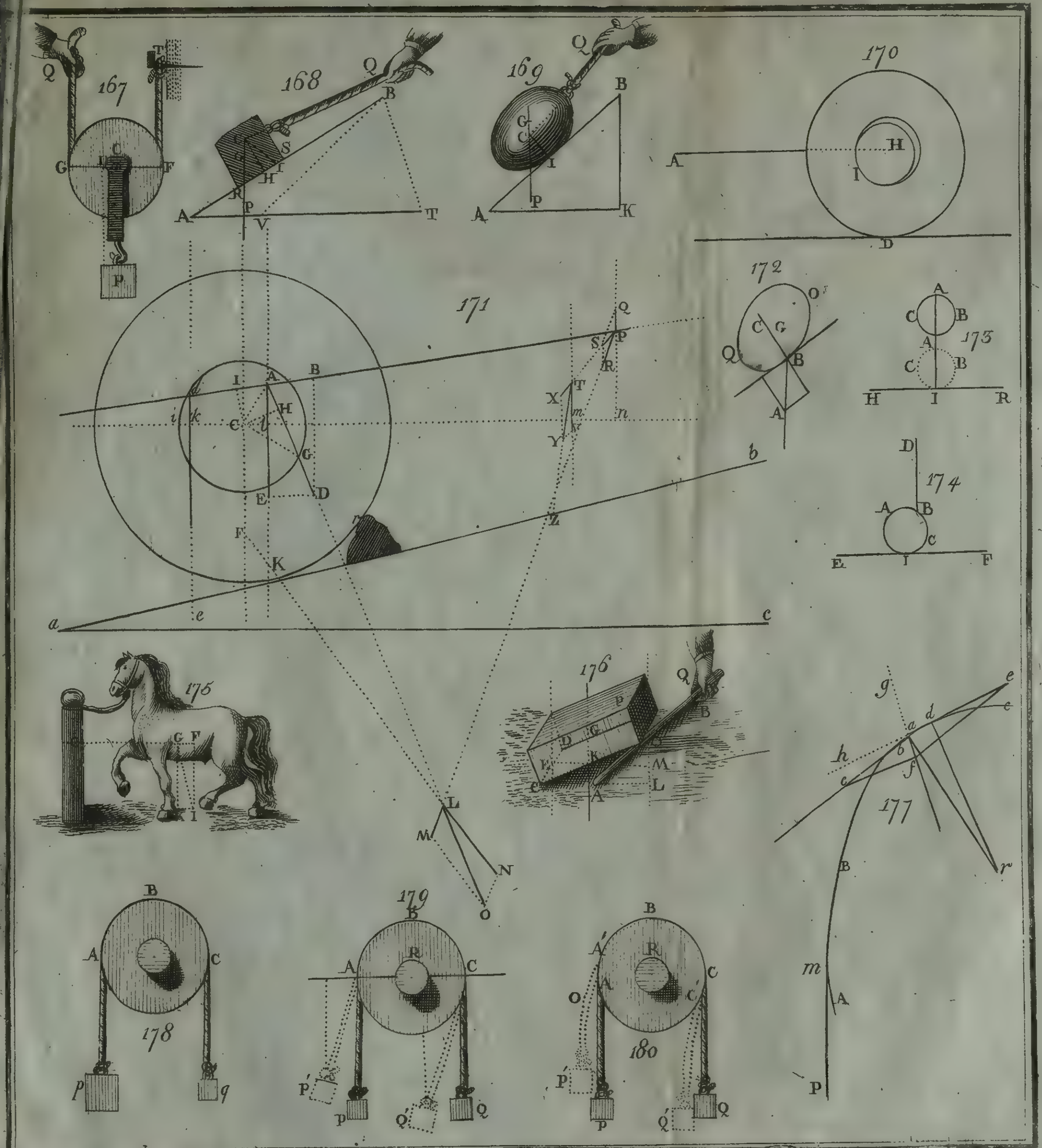

122
124
123
125
128
126
127
129
130


131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148








167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180


Colour Chart #13
Inches
Centimetres
DANES-PICTA.COM
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black

